Teoria cyfr

Konferencja „Elementarne, ale niebanalne”
(26 października 2019 r.)
Sielpia

Referat nawiązuje do artykułu o tym samym tytule opublikowanym w najnowszym numerze gazetki Olimpiady Matematycznej Juniorów „Kwadrat” (Kwadrat 23, wrzesień 2019).

1. Liczbę sześciocyfrową nazywamy *znakomitą*, jeżeli wystepują w niej wszystkie cyfry od 1 do 6, każda dokładnie raz, oraz liczba utworzona z początkowych $n = 1, 2, \ldots, 6$ cyfr jest podzielna przez n. Wyznacz wszystkie sześciocyfrowe liczby znakomite.
2. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które po dowolnej permutacji cyfr dają liczbę podzielną przez przez 27.
3. Znajdź wszystkie liczby sześciocyfrowe które zwiększą się 6 razy, gdy ostatnie trzy cyfry przestawi się na początek, nie zmieniając ich kolejności.
4. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która ma tę własność, że aby ją pomnożyć przez 29 wystarczy dopisać taką samą cyfrę na początku i na końcu.
5. Pewna liczba całkowita dodatnia zaczyna się cyfrą 1. Jeśli cyfrę tę przestawimy na koniec, to liczba zwiększy się trzykrotnie. Jaka jest najmniejsza liczba o tej własności?
6. Liczbę pięciocyfrową, która ma wszystkie cyfry różne, pomnożono przez 4. W wyniku otrzymano liczbę zapisaną wspak. Jaka to liczba?
7. Jedną z cyfr pewnej liczby ośmiocyfrowej jest 0. Po wykreśleniu tego zera liczba zmniejszyła się dziewięciokrotnie. Znajdź wszystkie liczby o tej własności.
8. Czy można z cyfr $1, 2, \ldots, 6$, wykorzystując każdą dokładnie raz, utworzyć liczbę sześciocyfrową podzielną przez 11? Odpowiedź uzasadnij.
9. *(I OM-B-6)* Dowieść, że liczba, która w dziesiątkowym układzie pozycyjnym wyraża się za pomocą 91 jedynek, jest liczbą złożoną.
10. *(XIV OM-III-1)* Dowieść, że dwie liczby naturalne, których cyframi są same jedynki, są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy liczby ich cyfr są względnie pierwsze.
11. Udowodnij, że w zbiorze $1, 11, 111, \ldots$ istnieje nieskończony podzbiór, którego elementy są parami względnie pierwsze.
12. *(II OM-III-2)* Jakie cyfry należy umieścić zamiast zer na trzecim i piątym miejscu w liczbie 3000003, aby otrzymać liczbę podzielną przez 13?

13. *(VIII OM-I-6)* Znaleźć liczbę czterocyfrową, której dwie pierwsze cyfry są jednakowe, dwie ostatnie cyfry są jednakowe i która jest kwadratem liczby całkowitej.

14. *(XX OM-II-2)* Znaleźć wszystkie liczby czterocyfrowe, w których cyfra tysięcy jest równa cyfrze setek, a cyfra dziesiątek – cyfrze jedności i które są kwadratami liczb całkowitych.

15. *(XXII OM-I-9)* Znaleźć cyfry a, b, c, dla których przy każdym n naturalnym zachodzi równość

$$\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n}\underbrace{bb\ldots b}_{n}} + 1 = (\overline{\underbrace{cc\ldots c}_{n}} + 1)^2.$$

16. *(XIII OM-I-5)* Dowieść, że wszystkie potęgi liczby, której ośmioma cyframi końcowymi są 12890625, mają też na końcu cyfry 12890625.

17. *(XIII OM-II-6)* Znaleźć liczbę trzycyfrową o tej własności, że liczba przedstawiona tymi cyframi i w tej samej kolejności, ale przy podstawie numeracji różnej niż 10, jest dwa razy większa od liczby danej.

18. *(XXVI OM-III-4)* W rozwinięciu dziesiętnym pewnej liczby naturalnej występują cyfry 1, 3, 7 i 9. Udowodnić, że przez permutację cyfr tego rozwinięcia można otrzymać rozwinięcie dziesiętne liczby podzielnej przez 7.

19. *(XXXIII OM-I-2)* Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Udowodnić, że liczba

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$$

dzieli się przez p.

20. *(XXXV OM-I-5)* Udowodnić, że istnieje taka wielokrotność liczby 5^n, której zapis w układzie dziesiętnym składa się n cyfr różnych od zera.

21. *(LIV OM-I-5)* Liczba naturalna n_1 zapisana jest w układzie dziesiętnym za pomocą 333 cyfr, z których żadna nie jest zerem. Dla $i = 1, 2, 3, \ldots, 332$ liczba n_{i+1} powstaje z liczby n_i przez przeniesienie cyfry jedności na początek. Dowieść, że albo wszystkie liczby $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{333}$ są podzielne przez 333, albo żadna z nich.