

Nowy, nieznany czternastościan

oraz inne facecje o liczbie 14

Michał Szurek

Abstrakt artykułu: sensacja! Nowa bryła o czternastu ścianach! Ponieważ Dzień Edukacji Narodowej przypada 14 października, proponuję, by bryłę nazwać imieniem Obecnej Reformy Edukacji! Inne, bardziej merytoryczne uzasadnienie – w tekście.

Dwunasta konferencja Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej odbyła się, już tradycyjnie, w ośrodku Łucznik w Sielpi koło Końskich, 25-27 października 2019 roku. Jak zwykle, była udana a dużym walorem było zwyczajne spotkanie się. Spotkanie nauczycieli, którym po prostu zależy na edukacji i wychowaniu młodego pokolenia. W latach sześćdziesiątych istniał zespół siedmiu dziewcząt, „Filipinki”. Fałszowały, były pretensjonalne i trochę kiczowate, ale wpadające w ucho. W jednej z piosenek śpiewały, że w dniu opuszczenia szkoły przyrzekają „profesorze, rozwiązywać tve zadanie, jak ucziwie i mądrze żyć”

„Przyszłość świata jest w oddechach dzieci spieszących do szkoły”. To mądrość Talmudu. W potępianym dziś z motywów ideologicznych wierszu Juliana Tuwima „Do córki w Zakopanem” znajdujemy frazę: „kłaniaj się [córeczko], wiejskim nieznanym nauczycielkom, brnącym do szkółek w mrozy siarczyste”. Nauczyciele są grupą, od której najsilniej zależy pomyślność nas wszystkich.

Puściłem się specjalnie na wyżyny egzaltacji, dla kontrastu. Będę bowiem trochę prześmiewczy a trochę poważny.

Dopiero po zakończeniu konferencji zobaczyłem tę sensację! Odkryliśmy nowy, nieznany czternastościan – czyli pewną bryłę o czternastu ścianach. My, to znaczy anonimowa grupa uczestników (może się ujawnią, jeżeli pamiętają!!! – proszę) – a zasługą piszącego te słowa jest tylko wywołanie tematu. Mianowicie na zajęciach poprosiłem o skonstruowanie bryły o 14 ścianach za pomocą wyjątkowo udanej pomocy szkolnej: klocków REKO. Jak widać, nie uprawiam kryptoreklamy, tylko po prostu reklamę. Naprawdę bardzo udany pomysł i wykonanie.

Wynik 45 minutowych zajęć (a właściwie ich połowy, bo przez drugą połowę robiliśmy co innego) na zdjęciu poniżej. Imponujące, dziękuję. Opracowanie tego wszystkiego zajmie mi kilka miesięcy. Może ktoś mi pomoże? Może razem napiszemy książeczkę o bryłach z REKO?

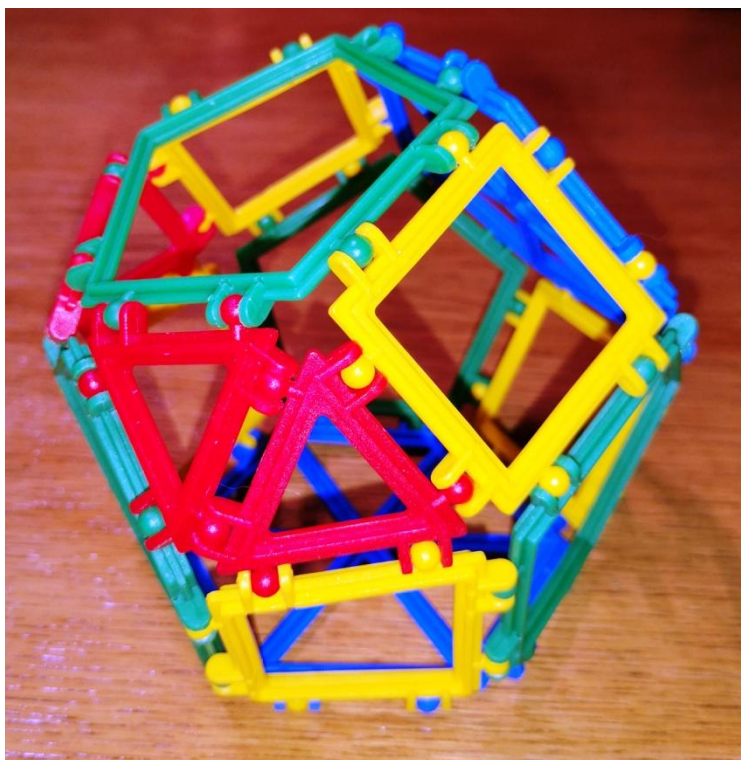
Autorką zdjęcia (fot. 1) jest p. Alicja Gawrońska. Pamiętacie Państwo Sielpię? Spotykalmy się, rozmawiajmy. To zawsze pomaga.

Gdzieś na ławce na fot. 1 leży nasza bryłka - bohaterka dnia. Ze względu na jej własności, omówione w dalszym ciągu, proponuję ją nazwać Bryłą Imienia Obecnej Reformy Edukacji. Kto za, kto przeciw, kto się wstrzymał? Może jednak najpierw zapoznamy się z kandydatką, a potem głosujmy. Na fot. 2 owa bryła z bliska.

Jak pisałem, na połowie 45-minutowych zajęć dałem uczestnikom zadanie: zbuduj z klocków REKO czternastościan. Wynik przeszedł najsmielsze oczekiwania (fot. 1). Na razie omówię jedno rozwiązanie – najciekawsze, choć fałszywe.



Fot. 1. Plon 45-minutowych zajęć w Sielpi



Fot. 2. Bryła im. Reformy Edukacji.

Jak to? Najciekawsze, ale fałszywe? No, to po kolei. Zróbmy sobie ładną bryłkę. Robimy najpierw podstawę ściany boczne – sześciokąt obkładamy na przemian pięciokątami i kwadratami (rys. 3). Zaginamy do góry; otrzymujemy „koronę” – gdybyśmy używali tylko pięciokątów, mielibyśmy połówkę dwunastościanu. Możemy nietrudno obliczyć współrzędne wierzchołków tej „korony”. Przyjmijmy, że wierzchołkami sześciokąta $ABCDEF$ w podstawie są pierwiastki szóstego stopnia z 1, tzn.

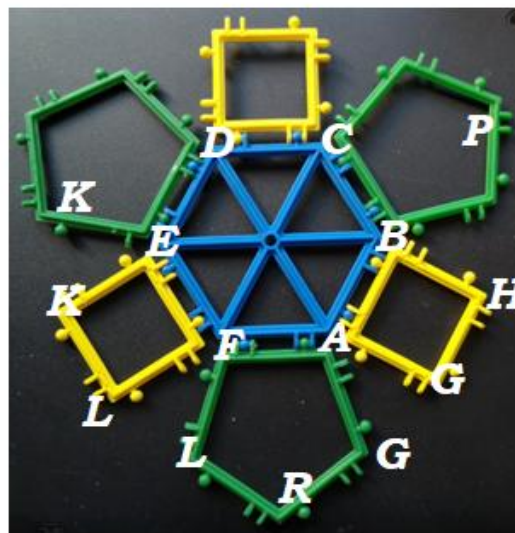
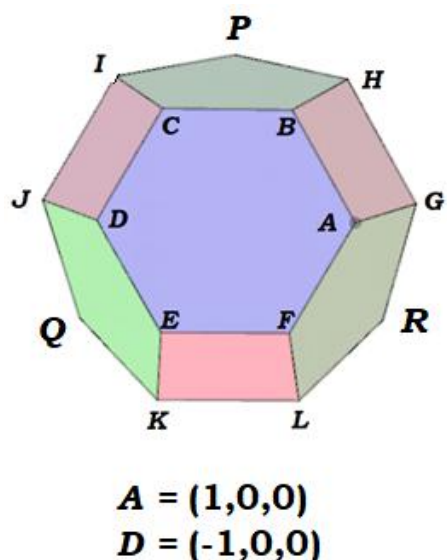
$$A = (1,0,0), B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}, 0\right), C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}, 0\right),$$

$$D = (-1, 0, 0), E = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\varepsilon}{2}, 0\right), F = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\varepsilon}{2}, 0\right),$$

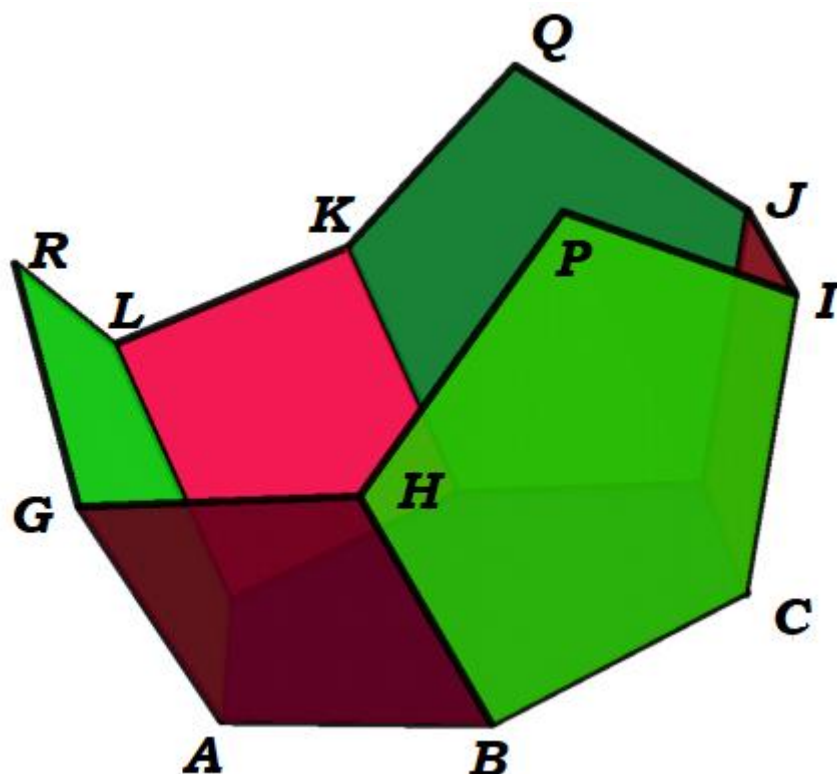
gdzie $\varepsilon = \sqrt{3}$. Ponadto, jeżeli przyjmiemy $\vartheta = \sqrt{5}$, to wierzchołkami korony będą (rys. 1,2,3)

$$G = \left(\frac{3+\vartheta}{4}, \frac{\varepsilon(-1+\vartheta)}{12}, \sqrt{\frac{3+\vartheta}{6}}\right), H = \left(\frac{1+\vartheta}{4}, \frac{\varepsilon(5+\vartheta)}{12}, \sqrt{\frac{3+\vartheta}{6}}\right), I = \left(\frac{3+\vartheta}{4}, \frac{\varepsilon(5+\vartheta)}{12}, \sqrt{\frac{3+\vartheta}{6}}\right),$$

$$J = \left(\frac{3+\vartheta}{4}, \frac{\varepsilon(-1+\vartheta)}{12}, \sqrt{\frac{3+\vartheta}{6}}\right), K = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon(2+\vartheta)}{6}, \sqrt{\frac{3+\vartheta}{6}}\right), L = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\varepsilon(2+\vartheta)}{12}, \sqrt{\frac{3+\vartheta}{6}}\right)$$



Rys. 4, rys. 5. Korona „z dołu” (= diagram Schlegela) i jej siatka.



Rys. 6. „Korona” po sklejeniu.

Koronę można domknąć, to znaczy zrobić z niej wielościan wypukły, ograniczony wielokątami. Minimalistyczny sposób to taki. Punkty P, Q, R są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku 2. Po wstawieniu tego trójkąt jako „daszka” zobaczymy jeszcze trzy „dziury” : $RGHP, PIJQ$ i $QKLR$ - wszystkie w kształcie trapezów równobocznych o bokach 2, 1,1,1. Każdy z tych trapezów złożony jest z czterech trójkątów równobocznych. Doklejamy.

Oto i co powstało - zgrabny jedenastościan (rys. 7). Składają się na niego sześciokąt foremny, trzy kwadraty, trzy pięciokąty foremne (o boku 1), jeden trójkąt równoboczny o boku 2 i trzy trapezy równoramienne o bokach 2,1,1,1. Wyobrażam sobie, że tak mógł wyglądać domek na Księżycu, w którym mieszkali Pirx i Langner, (*Stanisław Lem, Odruch warunkowy*). Stanisław Lem (1921- 2005) zasługiwał na nagrodę Nobla. Prawdopodobnie był niezrozumiany i trudno przetłumaczalny na niesłowiańskie języki. Ukrywał pod językiem „kosmicznym” codzienne, zwykłe problemy nas wszystkich. Uważam, że prześcigał Reymonta, Szymborską i Olgę Tokarczuk razem wziętych. Nie jestem jednak jurorem nagrody Nobla.

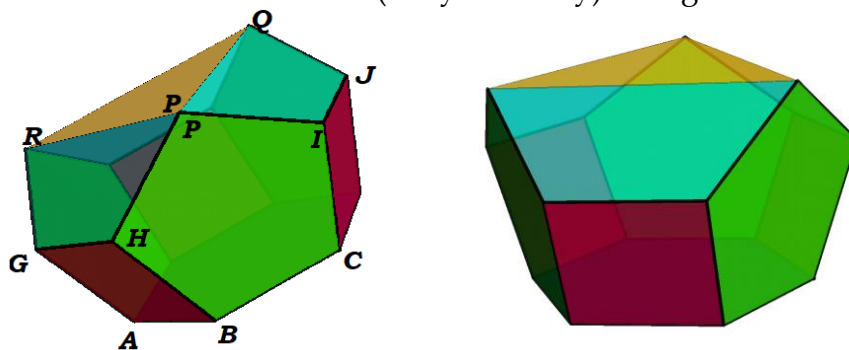
Będę jednak opisaną konstrukcję nazywać domkiem Pirxa. Solidny, ergonomiczny domek, przylepiony do księżycowej skały (jak w cytowanym opowiadaniu). Pentagonalna podstawa, płaski trójkątny daszek i ukośne trapezoidalne świetliki - okna u góry. Urozmaicony parter - na przemian ściany kwadratowe i pięciokątne. Może nie tak, jak w dworkach szlacheckich, ale całość tchnie trudno opisywalną nostalgią. Dla przewyciężenia jej takie oto zadanie:

Zadanie. Oblicz objętość domku Pirxa.

Komentarz: Wcale nie łatwe!!! Zacząłem ochoczo tak. Obliczyłem pole przekroju poziomego, tuż nad podłogą. „Tuż” to znaczyło „do poziomu górnych boków kwadratu”. Wyszło, że na wysokości h od podłogi owo pole to $3\sqrt{h^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}h + \frac{3}{4}}$. Nieźle, wyrażenie pod pierwiastkiem to trójmian z ujemnym wyróżnikiem, przy całkowaniu trzeba zrobić podstawienie hiperboliczne ... Zasnąłem już od razu przy obliczeniach. „Ale po co się męczysz?” zapytałem sam siebie, „są różne programy do obliczania całek”. Ale każdy dawał wyniki w tak niestrawnej postaci, że straciłem zainteresowanie dla zadania.

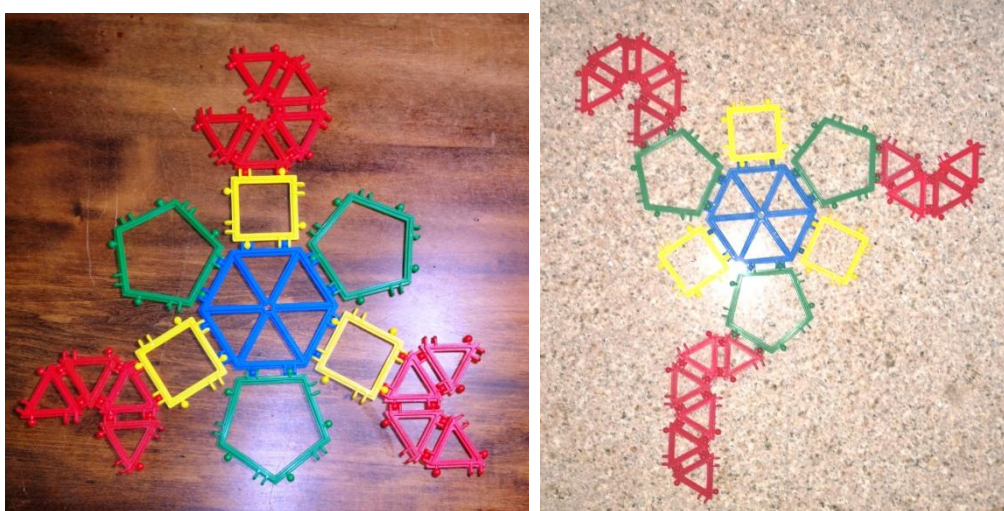
Nie podoba mi się w moich obliczeniach kształt funkcji „przekrój na wysokości h ”. Pole powinno chyba rosnać kwadratowo? Czytelnicy: pomożecie? Pomóżcie, bo już mi się wszystko płacze. ArSinh wyszczerza zęby.

Domek Pirxa można nietrudno przerobić na pożądaną w zadaniu czternastościan, doklejając czworościan foremny o podstawie PUV , gdzie U jest środkiem odcinka PQ , V środkiem odcinka PI . W tej dobudówce znakomicie pomieści się radioteleskop, skierowany na Ziemię, naszą jedyną planetę. Można dostawić na dachu dzióbek (mały lub duży) i w ogóle zabawa przednia!

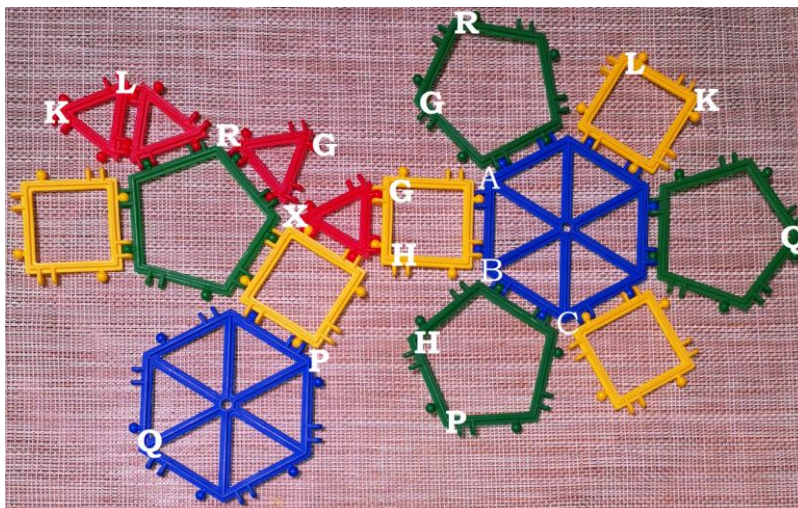


Rys. 7. Dwa ujęcia domku pilota Pirxa. Na Księżycu niepotrzebny jest stromy dach.

Wróćmy do Sielpi i wspomnianego odkrycia. Kilkuosobowa grupa postanowiła inaczej wykończyć koronę z rys. 1, 2. Zamiast długiego i niestrawnego opisu załączę siatkę i fotografię, co z tego wyszło. Proszę spróbować samodzielnie, z klocków albo z kartonu. Trochę trudno złożyć, ale jak się dociśnie, to powstanie interesująca bryła (fot.2, fot 9).

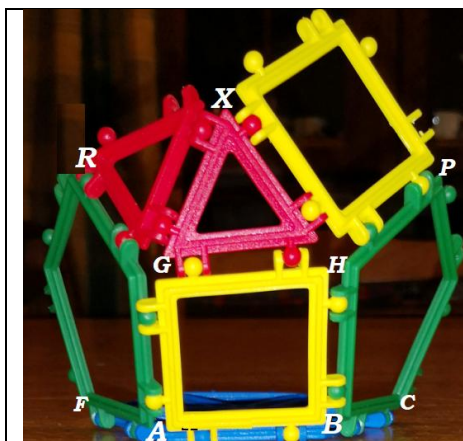


Rys. 8. Siatka domku pilota Pirxa i siatka z dobudowanym stryszkiem w postaci czworościanu foremego. Po takiej dobudowie domek wygląda jak imbryk z dzióbkiem, taki do herbaty, w chińskim stylu.



Rys. 9. Siatka bryły im. Reformy Edukacji. Sama bryła widoczna wyżej, na fot. 2.

Pokażę, że taka bryła się nie da „złożyć do kupy”, fot. 10. To znaczy, że bryła na fot. 2 nie istnieje. Wybioreę jeden z narożników.



Punkt X jest odległy od R, G, H o jednostkę, a od punktu P o pierwiastek z 2. Niech $X = (x, y, z)$. Wyznamy odległości punktu X od R, G, H, P . Rozwiążemy stosowne równania. Obliczenia są cokolwiek koszmarne, ale mamy XXI wiek. Oto obliczenia z programu Mathematica, wygodniej pracować z kwadratami odległości. Tekst między (* a *) nie jest kompilowany przez program – jest tylko komentarzem. Polecam sprawdzić wyliczenia za pomocą np. ogólnie dostępnego Wolfram Alpha.

Czy teraz przyjmujecie, Czytelnicy, pomysł, żeby tę bryłę uhonorować mianem „bryła imienia Reformy Edukacji”?

(* Bryła imienia Reformy Edukacji, analiza za pomocą programu Mathematica *)

```
punkty = Table[{Cos[ 2 k Pi / 6], Sin[2 k Pi /6], 0},
{k,0,7}];
```

```
a = punkty[[1]]; b = punkty[[2]]; c = punkty[[3]];
d = punkty[[4]]; e = punkty[[5]]; f = punkty[[6]];
(* punkty sześciokątnej podstawy *)
```

```
hh = Sqrt[(3+Sqrt[5])/6];
```

(*wysokość na której są górne boki kwadratów korony *)

```
g = { (3+Sqrt[5])/4, (Sqrt[15]-Sqrt[3])/12, hh};
```

```
h = { (1+Sqrt[5])/4, (5 Sqrt[3]+Sqrt[15])/12, hh};
```

```
i = {-(Sqrt[5]+1)/4, (5 Sqrt[3]+Sqrt[15])/12, hh};
```

```
j = {-(3+Sqrt[5])/4, Sqrt[3]*(-1+Sqrt[5])/12, hh};
```

```
k = {-1/2, -(2 Sqrt[3]+Sqrt[15])/6, hh};
```

```
l = {1/2, -(2 Sqrt[3]+Sqrt[15])/6, hh};
```

(* g, h, i, j, k, l – wierzchołki korony *)

```
p = {0, 2/Sqrt[3], (4+2 Sqrt[5])/Sqrt[6(3+Sqrt[5])]};
```

```
q = {-1, -1/Sqrt[3], (4+2 Sqrt[5])/Sqrt[6(3+Sqrt[5])]};
```

```
r = {1, -1/Sqrt[3], (4+2 Sqrt[5])/Sqrt[6(3+Sqrt[5])]};
```

(* p, q, r – daszek trójkątny domku Pirxa; (x,y,z to współrzędne hipotetycznego punktu X, pamiętamy, że kwadrat odległości wektorów to kwadrat skalarny ich różnicy *)

```
Solve[{{{x,y,z}-r} . ({x,y,z}-r)==1,
({x,y,z}-g) . ({x,y,z}-g)==1,
```

$$\begin{aligned} &(\{x, y, z\} - h) \cdot (\{x, y, z\} - h) == 1, \\ &(\{x, y, z\} - p) \cdot (\{x, y, z\} - p) == 2, \\ &\quad \{x, y, z\} \end{aligned}$$

(* program odpowie {}, to znaczy, że zbiór rozwiązań jest pusty; dla pewności możemy rozwiązać trzy pierwsze równania i trzy ostatnie i zobaczyć, że są różne wyniki. Bryły nie da się złożyć z zaprojektowanego schematu (siatki). Znajomo brzmi, prawda? *)

Domek Pirxa wywołuje we mnie ciepłe myśli. Może ktoś z Czytelników opracuje dokładniej geometrię tej chatki? Może nie tylko geometrię? Fajnie by było zamieszkać w czymś takim. Niekoniecznie na Księżycu. Nie pamiętam dokładnie, ale widziałem podobną altankę w Tatrach, na drodze z Orawic do Cieśniaw w Juraniowej Dolinie. Po lewej stronie drogi, już blisko Szatanowej Polany. Sprawdzę latem. A może ktoś z Czytelników będzie tam wcześniej?

Ale skoro jestem przy głosie, to rozgamam się o liczbie 14. Zebrałem kiedyś trochę ciekawostek i szkoda, żeby się zmarnowały.

Zabawne, z lat wczesnej młodości zapamiętałem pewną fotografię z albumu z wczesnych lat pięćdziesiątych, kiedy Warszawa była jeszcze morzem gruzów z wysepkami nowych osiedli. Na mało zniszczonym skrzyżowaniu Alei Niepodległości z Rakowiecką skręcał w lewo, tramwaj numer 14. Podpis głosił, że niedługo będzie tu metro... (i rzeczywiście, już po czterdziestu latach było).

W Kościele katolickim „czternaście” wiąże się z czternastoma stacjami Drogi Krzyżowej, a także z grupą czternastu świętych, którzy przed swą męczeńską śmiercią wyprosilili u Boga łaskę udzielenia szczególnej pomocy tym właśnie, którzy o nią proszą za ich pośrednictwem. Jednym z nich był święty Krzysztof, dzisiaj opiekujący się automobilistami.

Czternastego lipca padła Bastylia i ... zaczął się XIX wiek (historycy całkiem serio datują go na 1789 - 1914, najdłuższy wiek w dziejach ludzkości - z kolei wiek dwudziesty trwał króciutko, do 1989). Czternaście punktów prezydenta USA Woodrowa Wilsona przyczyniło się do naszej niepodległości. Mniej szczęścia ma Tybet, okupowany przez Chiny. Duchowy przywódca Tybetańczyków, Dalaj Lama XIV, od lat żyje na wygnaniu w Indiach.

Przyjechała delegacja z Krosna
Czternastu ludzi
W ciemnych garniturach
Tomasz Jastrun, „Jeszcze jedna delegacja”

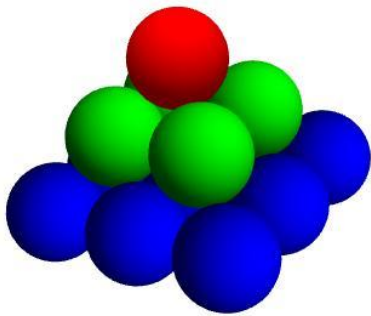
Czternastozgłoskowiec jest dzisiaj mało popularny. A użył go ten, który *pierwszy wdarł się na skałę boskiej Kalijopy*. Przypominam, że przed nim nie było na niej polskiej stopy:

Przed się Bóg jest na niebie, a stamtąd wszystko widzi,
Sprawiedliwych doświadcza, nieprawymi się hydzi:
Na złe ludzi wyleje deszcz gorący, siarczany,
Wyleje węgle żywe i grom z wichrem zmieszany;
Bo będąc sprawiedliwym, sprawiedliwość miłuje,
A dobre ludzi okiem łaskawem opatruje.

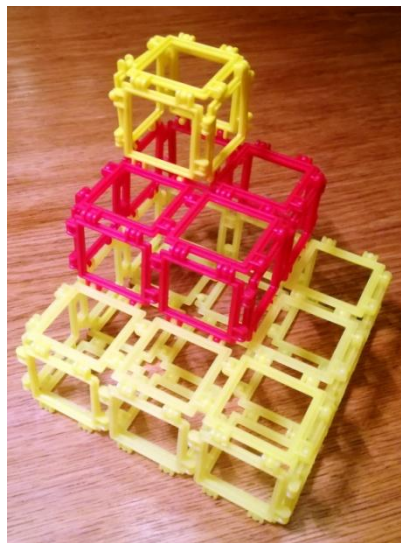
Jan Kochanowski, Psalm XI

Klasyczny sonet włoski ma czternaście wersów (rymy abba, abba, cdc, dcd) – przypomnijmy sobie np. „Sonety Krymskie” autorstwa pewnego studenta Wydziału Matematycznego Uniwersytetu w Wilnie (nie zrobił kariery w matematyce i słuch o nim zaginął). William Shakespeare napisał $154 = 14 \cdot 11$ sonetów (miały one nieco inną formę niż klasyczne, włoskie). Po czternaście lat miały Zosia Horeszkówna i Julia Capuletti, kiedy weszły na karty literatury, ale związek tego z popularnymi w anglosaskiej kulturze Walentynkami (14 lutego) jest przypadkowy.

Przechodząc do matematyki, odnotujmy, że 14 jest sumą kwadratów trzech pierwszych liczb naturalnych: $1^2+2^2+3^2 = 14$. Pokazują to piramidki na fot. 11 i 12.



Fot. 11



Fot. 12

O czternastościanach nie piszę – za dużo by było. Jak pisałem, za kilka miesięcy... Proszę zapoznać się na razie z ośmiościanem ściętym. To ładna bryłka. Oczywiście wszelkie informacje poda nam wujek Gugel wraz z cicią Wikipedią.

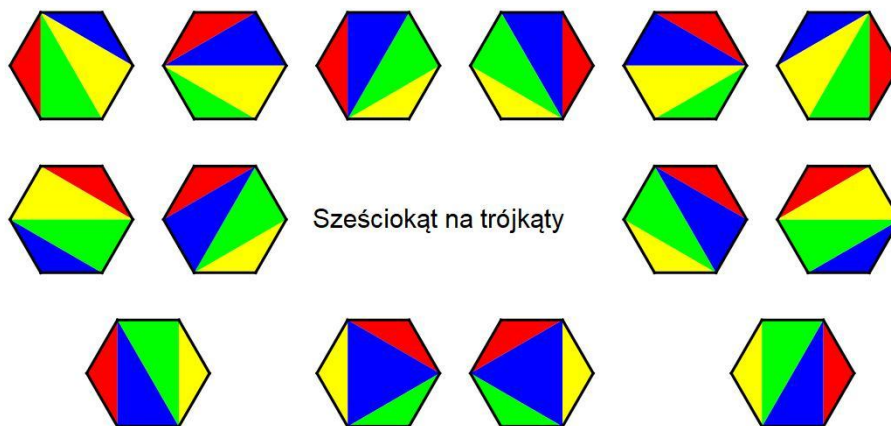
A oto liczby Catalana (belgijski matematyk Eugène Charles Catalan, 1814 – 1894), oznaczane tradycyjnie przez C_n . Mianowicie:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \text{ Mamy kolejno}$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 2,$$

$$C_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5, \quad C_4 = \frac{1}{5} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 14 \dots$$

Liczby Catalana mają znaczenie geometryczne – pokazują, na ile sposobów można podzielić wielokąt o n bokach na $n - 2$ trójkątów. Łatwo się przekonać, że kwadrat można podzielić tak na dwa sposoby, pięciokąt na pięć, a sześciokąt na czternaście (rys. 13).



Rys. 13. Czternaście sposobów podziału sześciokąta.

Na zakończenie, na rysunku, nomen omen czternastym, widzimy interesujący trójkąt. Jest „prawie równoboczny” – jego boki mają długości 13, 14, 15, a jest interesujący matematycznie dlatego, że i jego pole wyraża się liczbą naturalną (i jest równe 84; ci z Państwa, którzy czytali *Śladami Pitagorasa* zapamiętali może, że tyle lat żył Diofantos). Jak pamiętamy, pole trójkąta *równobocznego* o boku a wyraża się wzorem $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a zatem jeżeli a jest liczbą całkowitą, to pole jest liczbą niewymierną.

Inne trójkąty „prawie równoboczne” o podobnej własności też mają coś wspólnego z liczbą 14, na przykład następnym takim trójkątem jest ten o bokach 193, 194 = 14² - 2, 195, a cała seria wygląda tak:

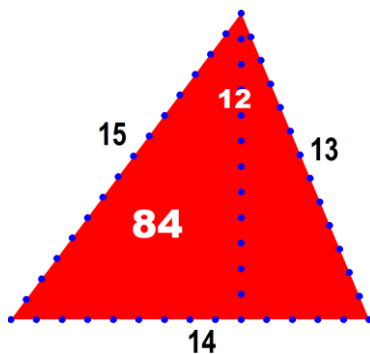
$$13, 14, 15$$

$$(14^2 - 2) - 3, \quad 14^2 - 2, \quad (14^2 - 2) - 1$$

$$(14^2 - 2)^2 - 3, \quad (14^2 - 2)^2 - 2, \quad (14^2 - 2)^2 - 1$$

i tak dalej:

$$b_1 = 14, \quad b_{n+1} = b_n^2 - 2 \quad .$$



Rys. 14. Ładny ten trójkąt, prawda?