Tomasz Szymczyk
V LO Bielsko-Biała

Nie zawsze do pary

Przydatne fakty

- Suma dwóch liczb parzystych lub dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.
- Suma liczby parzystej i nieparzystej jest liczbą nieparzystą.
- Iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.
- Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą.
- Suma nieparzystej liczby liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.
- Jeżeli elementy pewnego zbioru można pogrupować w pary, to liczba wszystkich elementów w tym zbiorze jest liczbą parzystą.

* * * * *

1. Jaś i Małgosia dostali od dziadka na Dzień Dziecka 3333 monety, z których każda była o nominale 1 grosz albo 5 groszy. Po przeliczeniu pieniędzy Jaś twierdzi, że mają 150 zł. Małgosia mówi, że Jaś pomylił się w rachowaniu. Kto z nich ma rację?

2. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2+n+2019$ jest liczbą nieparzystą.

3. Piotr twierdzi, że istnieją cztery liczby naturalne, których zarówno suma, jak i iloczyn są liczbami nieparzystymi. Czy ma rację?

4. Na stole leży 20 kawałków papieru. Dowolnie wybrany kawałek rozrywamy na 7 części. Proces ten kontynuujemy, tzn. za każdym razem wybieramy jeden kawałek i rozrywamy go na 7 części. Czy w ten sposób, po pewnej liczbie kroków naszego procesu, możemy uzyskać dokładnie 2019 kawałków papieru?

5. Nauczyciel napisał na tablicy liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Codziennie uczniowie wybierali (spośród zapisanych na tablicy) dwie liczby a i b, ścierali je i w ich miejsce zapisywali liczby $a+1$, $b+1$. Czy pewnego dnia roku szkolnego mogli uzyskać zbiór dziesięciu jednakowych liczb?

6. Czy istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d, e i f, dla których liczby

$$a-b,\ b-c,\ c-d,\ d-e,\ e-f,\ f-a,$$

wypisane w pewnej kolejności, są kolejnymi liczbami całkowitymi?

7. Czy tablicę o wymiarach 15×15 można zapełnić szczelnie kostkami domina o wymiarach 1×2 tak, aby żadne dwie kostki nie zachodziły na siebie?

8. Cztery początkowe wyrazy pewnego ciągu to: 2, 2, 1, 1. Każdy następny wyraz jest cyfrą jedności sumy czterech wyrazów bezpośrednio go poprzedzających. Czy w tym ciągu wystąpi blok: 6, 7, 8, 9?

9. Na tablicy napisano kilka liczb całkowitych, między którymi umieszczono znak „+” lub „−” i w wyniku tych działań otrzymano liczbę 2018. Czy można tak wymienić niektóre znaki „+” i „−” na przeciwne, aby w wyniku otrzymać liczbę 2019?

10. Rozstrzygnij, czy liczby 1, 2, 3, ..., 76, 77 można rozbić na 11 grup po 7 liczb tak, aby w każdej grupie suma trzech liczb była równa sumie czterech pozostałych. Odpowiedź uzasadnij.

11. Suma 2000 liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą. Wykaż, że iloczyn tych liczb jest liczbą parzystą.

12. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby całkowite p i q, które spełniają równanie

$$\left|p^2+q\right|+\left|p^2-q\right|+\left|p+q^2\right|+\left|p-q^2\right|=12345.$$

13. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby całkowite a, b, c i d, które spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2+d^2 \\ a+b+c+d=2019. \end{cases}$$

14. Na tablicy zapisane były liczby 1, 2, 3, ..., 100, 101. Wybieramy spośród nich dwie dowolne liczby, ścieramy je i wpisujemy zamiast nich liczbę $a-b$. Po 100 takich operacjach na tablicy pozostanie jedna liczba. Uzasadnij, że będzie to liczba różna od zera.

15. Na tablicy zostało napisanych 10 plusów i 15 minusów. Dozwolony ruch polega na wymazaniu 2 dowolnych znaków i wpisaniu zamiast nich plusa, jeśli były jednakowe lub minusa, w przeciwnym przypadku. Jaki znak zostanie na tablicy po wykonaniu dwudziestu czterech takich operacji?

16. Dana jest szachownica o wymiarach 8×8. Pionek stoi w lewym dolnym polu i może poruszać się wyłącznie »poziomo« lub »pionowo« przechodząc na sąsiednie pole. Czy można obejść tym pionkiem całą szachownicę tak, że na każdym polu pionek będzie tylko jeden raz i wędrówkę zakończy w prawym górnym polu tej szachownicy?

17. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby całkowite a, b, c, dla których

$$(9a-5b)(7b-3c)(5c-a)=123456789?$$

18. Liczby: 1, 2, 3, ..., 19, 20 zapisano w wierzchołkach i na środkach krawędzi sześcianu, przy czym każda z nich została użyta dokładnie jeden raz. Czy można je tak pozamieniać miejscami, aby liczby zapisane na środkach krawędzi były średnimi arytmetycznymi liczb zapisanych na ich końcach?

19. Na 99 kartkach napisano liczby 1, 2, 3, ..., 98, 99 — każdą na jednej kartce. Następnie kartki odwrócono, pomieszano i znów na nich zapisano liczby 1, 2, 3, ..., 98, 99 — po jednej liczbie na kartce. Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{98}, a_{99}$ oznaczają liczby będące sumami liczb zapisanych na kolejnych kartkach. Wykaż, że liczba $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_{98}\cdot a_{99}$ jest parzysta.

20. W miejsce $*$ należy wpisać jeden ze znaków: „+” albo „−”. Rozstrzygnij, czy istnieją takie nieparzyste liczby całkowite: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}, a_{11}$, dla których można tak dobrać znaki „+” oraz „−”, aby zachodziła równość

$$a_1 * a_2 * a_3 * \cdots * a_{10} * a_{11} = 2000.$$