Konferencja SEM
„Elementarne, ale niebanalne”

Przestrzenne niespodzianki

Joanna Jaszuńska

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Czy istnieje taki wielościan wypukły i taki punkt X w jego wnętrzu, aby żaden rzut punktu X na płaszczyznę zawierającą ścianę nie należał do tej ściany?

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ są trójkątami równobocznymi. Na ścianach SAD i SBC zbudowano, na zewnątrz, czworościany foremne $SADT$ i $SBCU$.

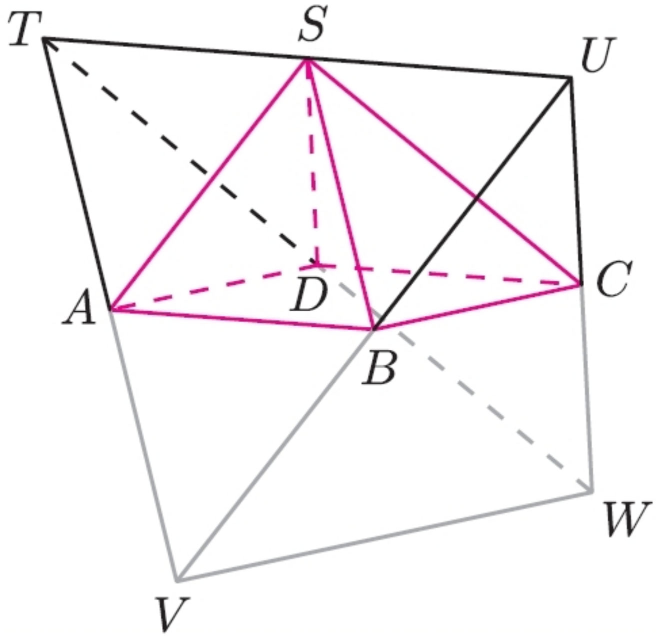
Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ są trójkątami równobocznymi. Na ścianach SAD i SBC zbudowano, na zewnątrz, czworościany foremne $SADT$ i $SBCU$. Ile ścian ma otrzymana w ten sposób bryła?

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ są trójkątami równobocznymi. Na ścianach SAD i SBC zbudowano, na zewnątrz, czworościany foremne $SADT$ i $SBCU$. Ile ścian ma otrzymana w ten sposób bryła?

Odpowiedź: 9.

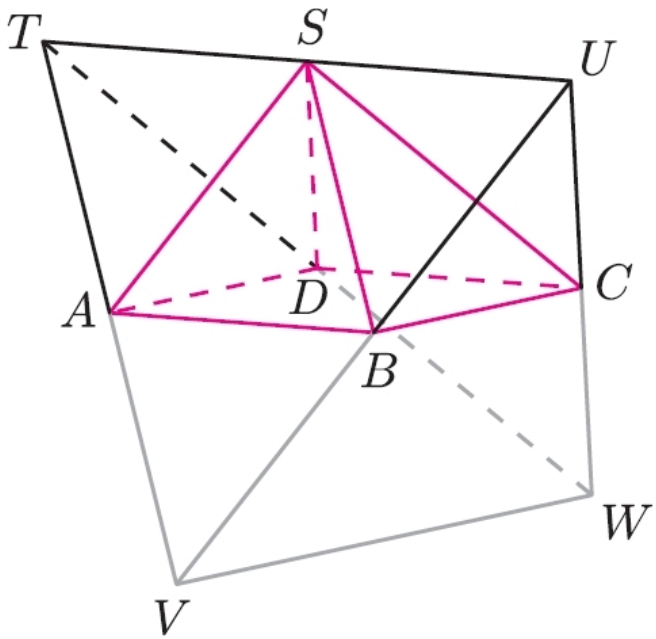
Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ są trójkątami równobocznymi. Na ścianach SAD i SBC zbudowano, na zewnątrz, czworościany foremne $SADT$ i $SBCU$. Ile ścian ma otrzymana w ten sposób bryła?

Odpowiedź: 9.



Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ są trójkątami równobocznymi. Na ścianach SAD i SBC zbudowano, na zewnątrz, czworościany foremne $SADT$ i $SBCU$. Ile ścian ma otrzymana w ten sposób bryła?

Odpowiedź: 9.

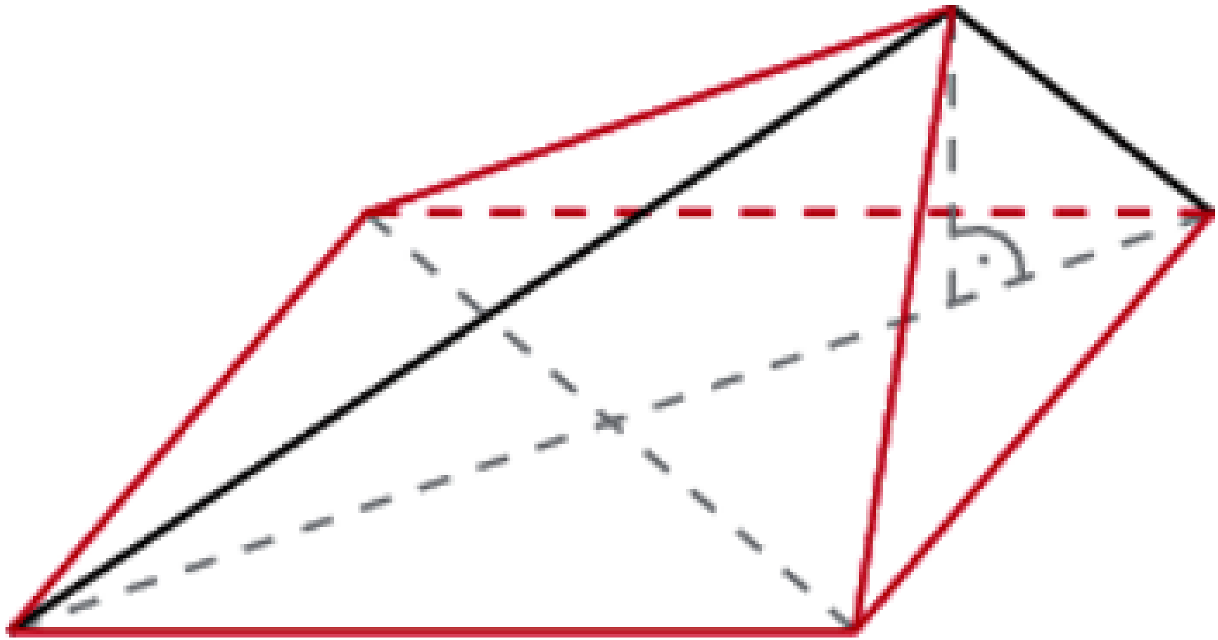


Odpowiedź lepsza: otrzymana bryła ma 5 ścian.

Wszystkie ściany boczne pewnego ostrosłupa o podstawie kwadratowej są trójkątami równoramiennymi.

Wszystkie ściany boczne pewnego ostrosłupa o podstawie kwadratowej są trójkątami równoramiennymi. Czy ostrosłup ten musi być prawidłowy?

Wszystkie ściany boczne pewnego ostrosłupa o podstawie kwadratowej są trójkątami równoramiennymi. Czy ostrosłup ten musi być prawidłowy?

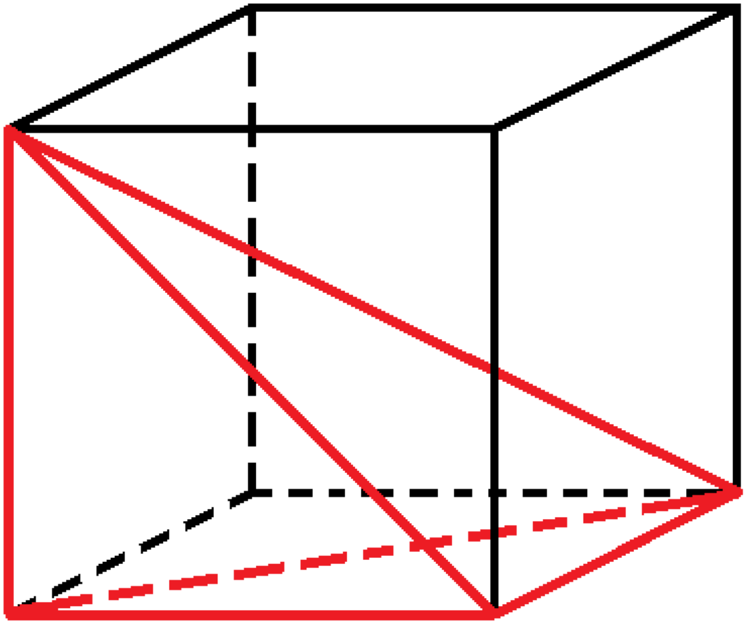


Ortocentrum

Ortocentrum

Czy wysokości każdego czworościanu przecinają się w jednym punkcie?

Ortocentrum
Czy wysokości każdego czworościanu przecinają się w jednym punkcie?



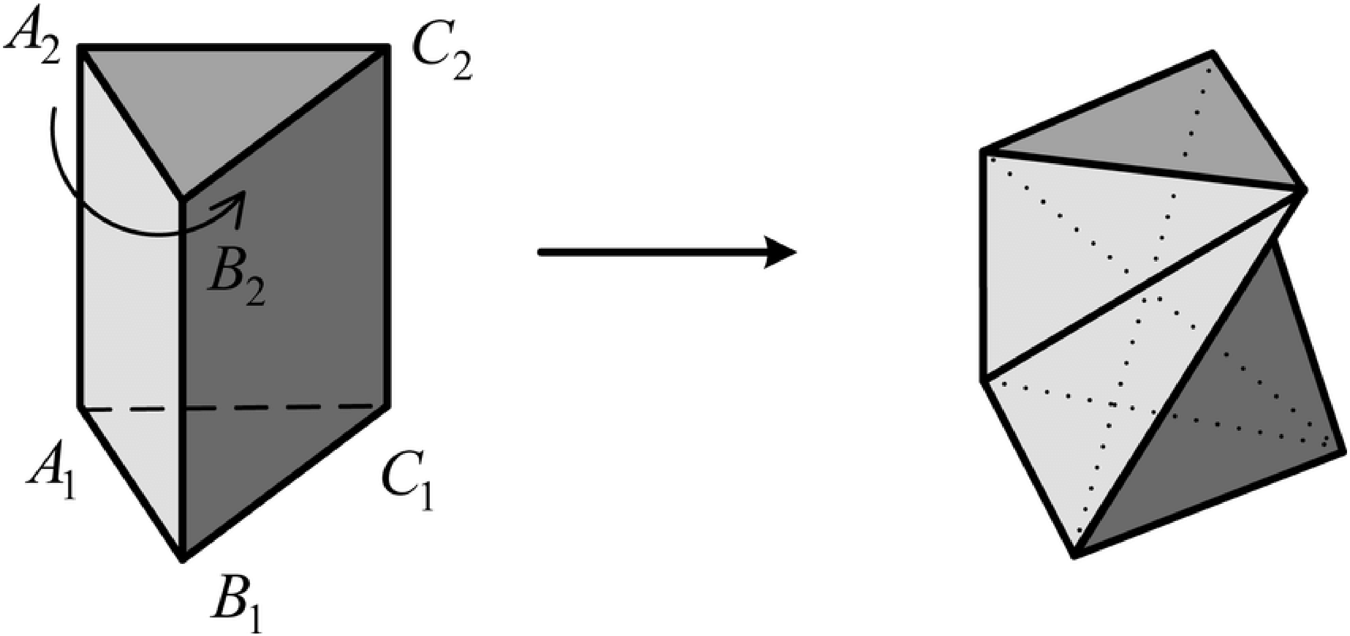
Triangulacja

Triangulacja

Czy każdy wielościan można striangulować, czyli podzielić na czworościany o wierzchołkach w wierzchołkach wyjściowego wielościanu?

Triangulacja

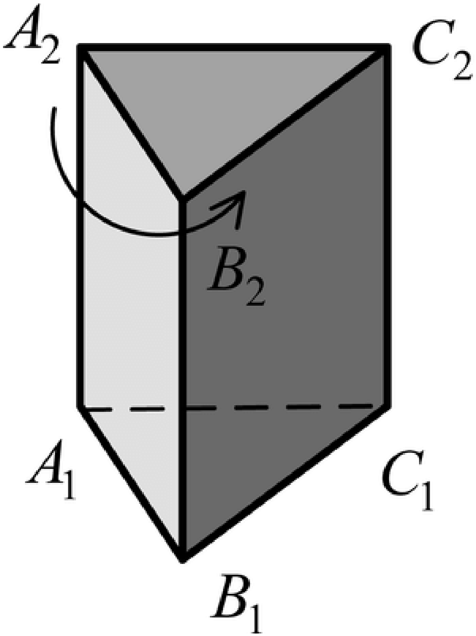
Czy każdy wielościan można striangulować, czyli podzielić na czworościany o wierzchołkach w wierzchołkach wyjściowego wielościanu?

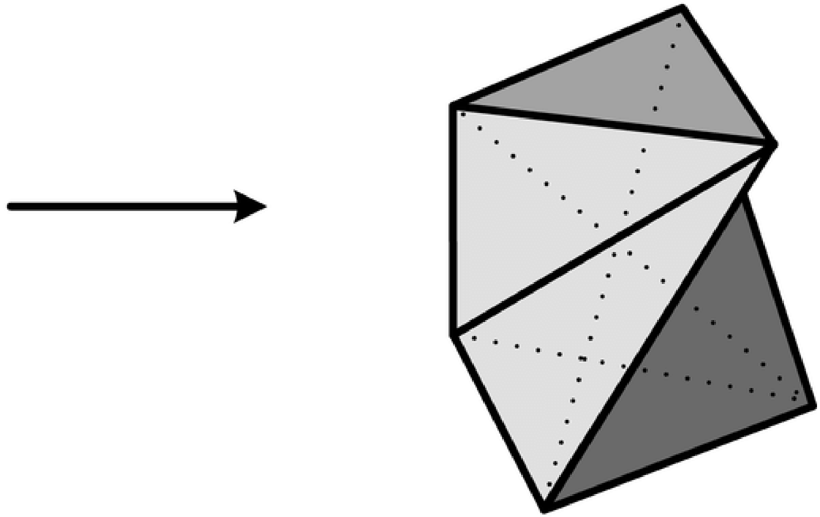


Wielościan Schönhardta

Triangulacja

Czy każdy wielościan można striangulować, czyli podzielić na czworościany o wierzchołkach w wierzchołkach wyjściowego wielościanu?



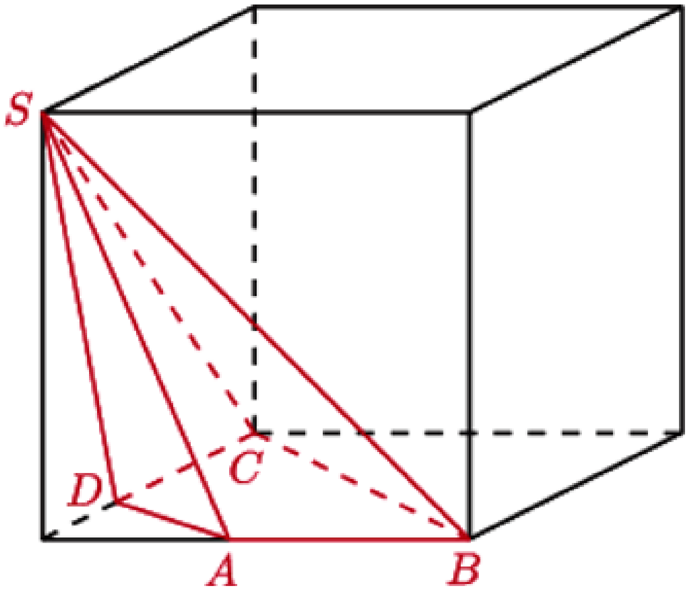


Wielościan Schönhardta

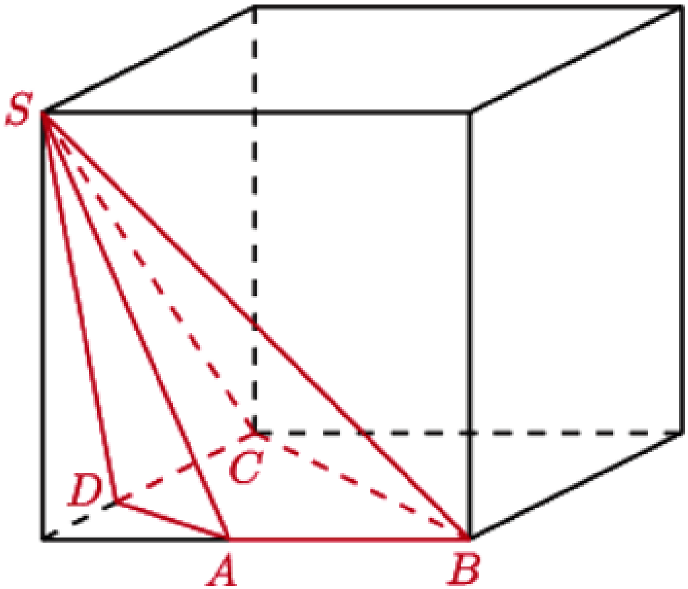
Czworościan zawierający dolną podstawę nie mieści się w tym wielościanie!

Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, że dwie jego ściany boczne, które nie mają wspólnej krawędzi, są prostopadłe do podstawy?

Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, że dwie jego ściany boczne, które nie mają wspólnej krawędzi, są prostopadłe do podstawy?



Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, że dwie jego ściany boczne, które nie mają wspólnej krawędzi, są prostopadłe do podstawy?

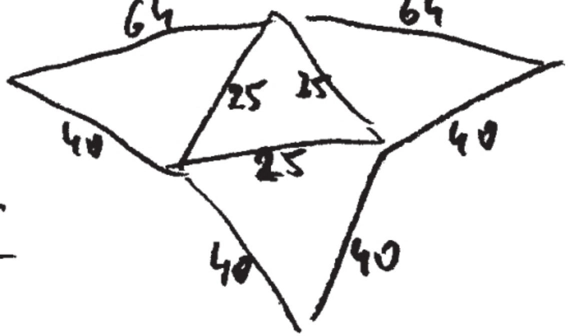


Czy istnieje taki ostrosłup o podstawie czworokąta **wklęsłego**, że dwie jego ściany boczne, które nie mają wspólnej krawędzi, są prostopadłe do podstawy?

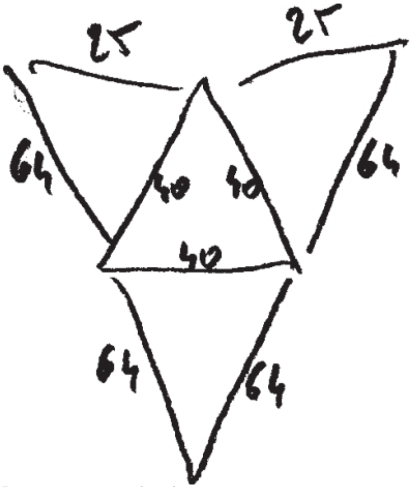
Czy istnieją takie czworościany T oraz T', o ścianach odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, że dla $i = 1, 2, 3, 4$ trójkąt S_i jest podobny do trójkąta S'_i

Czy istnieją takie czworościany T oraz T',
o ścianach odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S'_1, S'_2, S'_3, S'_4,
że dla $i = 1, 2, 3, 4$ trójkąt S_i jest podobny do trójkąta S'_i,
ale mimo to czworościan T nie jest podobny do czworościanu T'?

Czy istnieją takie czworościany T oraz T',
o ścianach odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S'_1, S'_2, S'_3, S'_4,
że dla $i = 1, 2, 3, 4$ trójkąt S_i jest podobny do trójkąta S'_i,
ale mimo to czworościan T nie jest podobny do czworościanu T'?

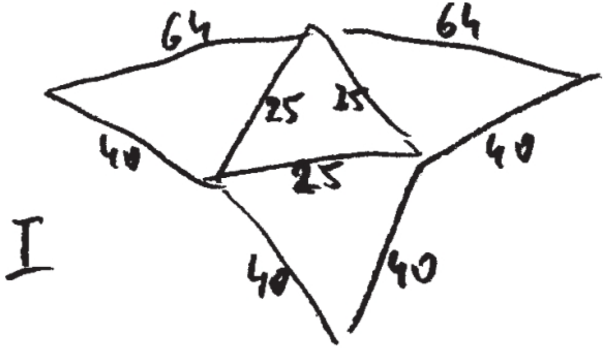


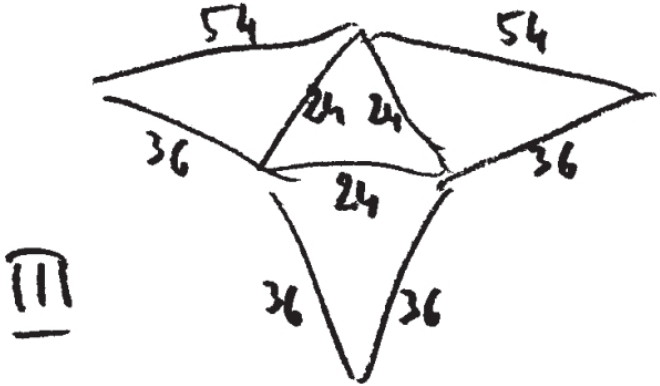
I

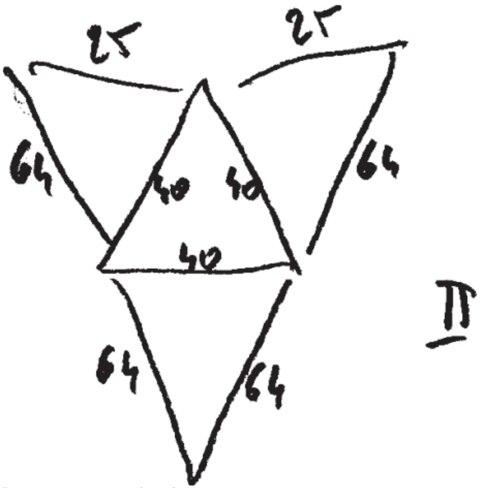


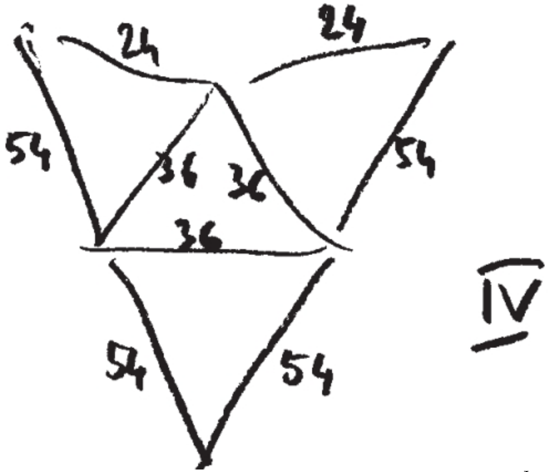
II

Czy istnieją takie czworościany T oraz T', o ścianach odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, że dla $i = 1, 2, 3, 4$ trójkąt S_i jest podobny do trójkąta S'_i, ale mimo to czworościan T nie jest podobny do czworościanu T'?



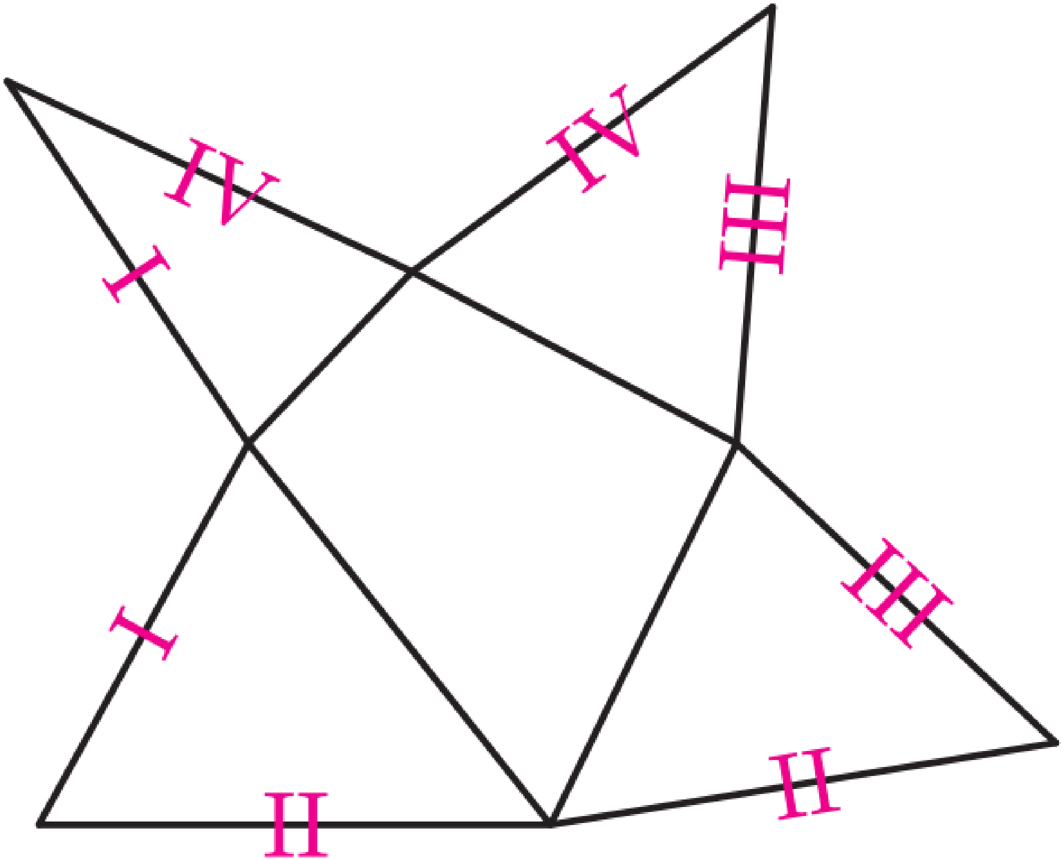




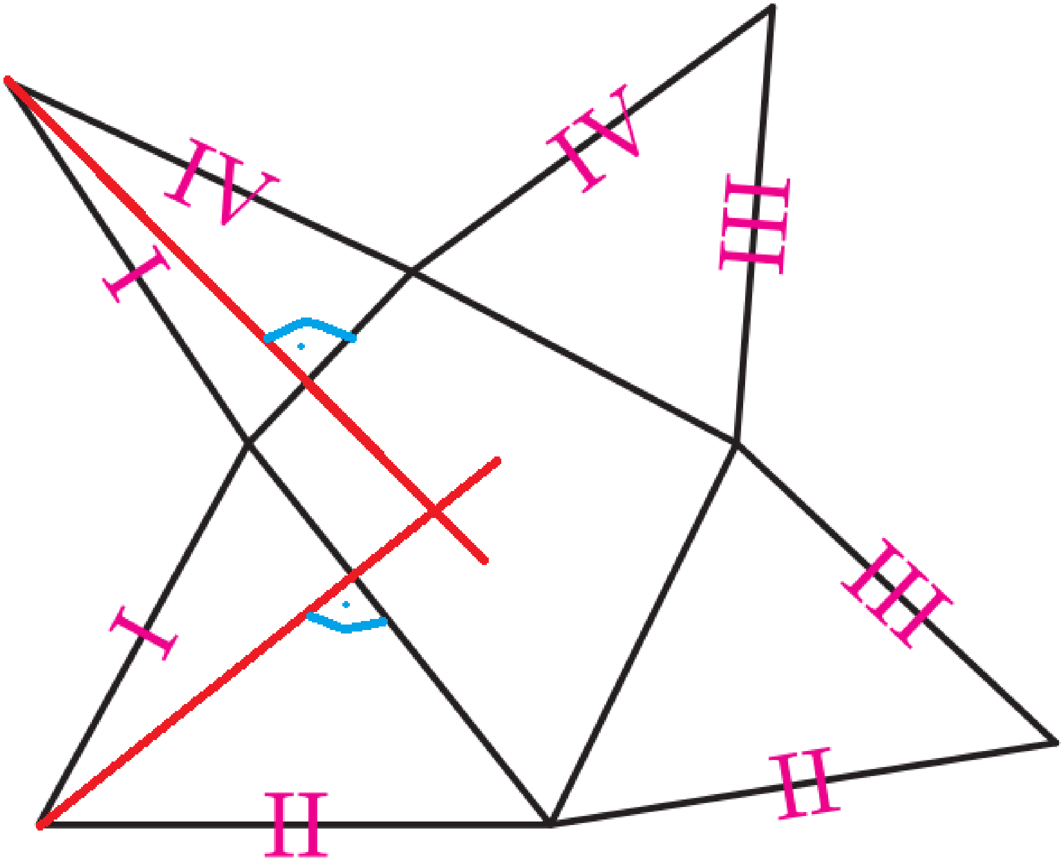


Czy to jest siatka ostrosłupa czworokątnego?

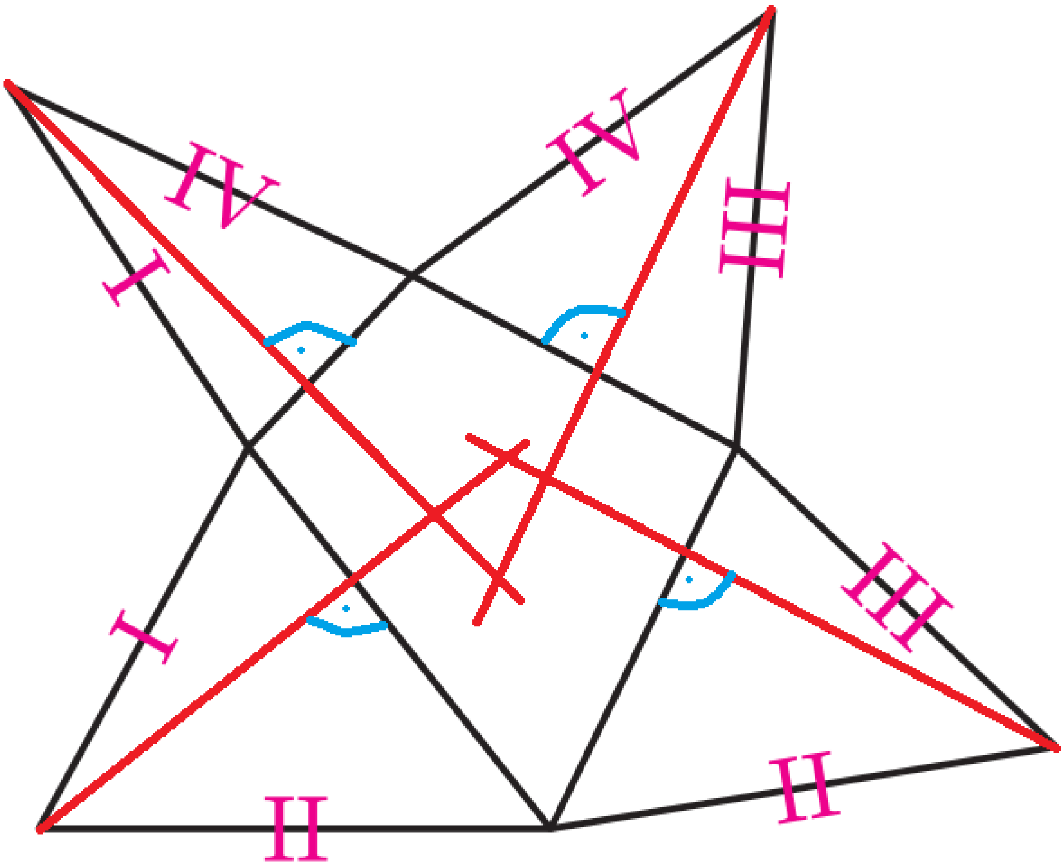
Czy to jest siatka ostrosłupa czworokątnego?



Czy to jest siatka ostrosłupa czworokątnego?

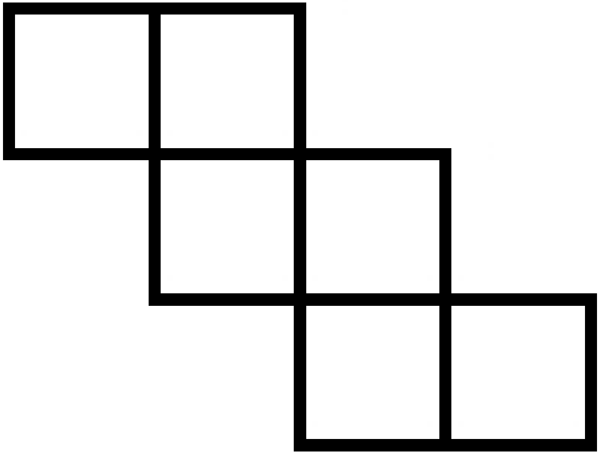


Czy to jest siatka ostrosłupa czworokątnego?

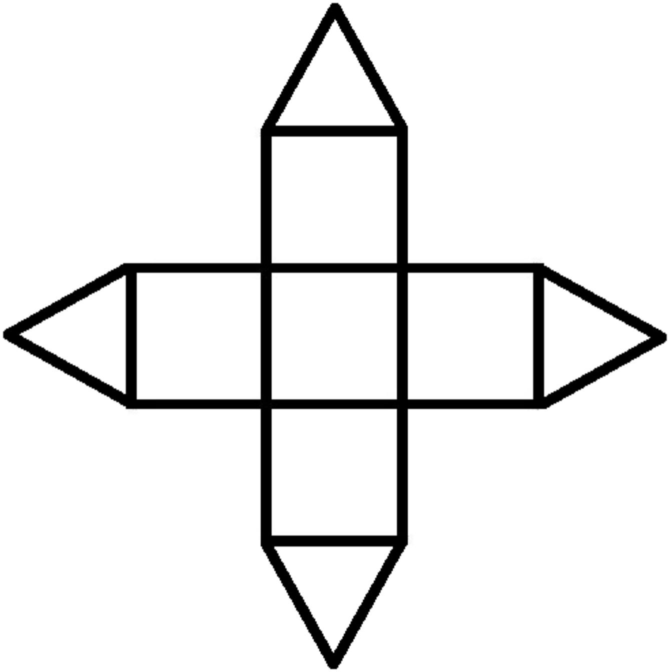


Czy wiadomo, jak sklejać?

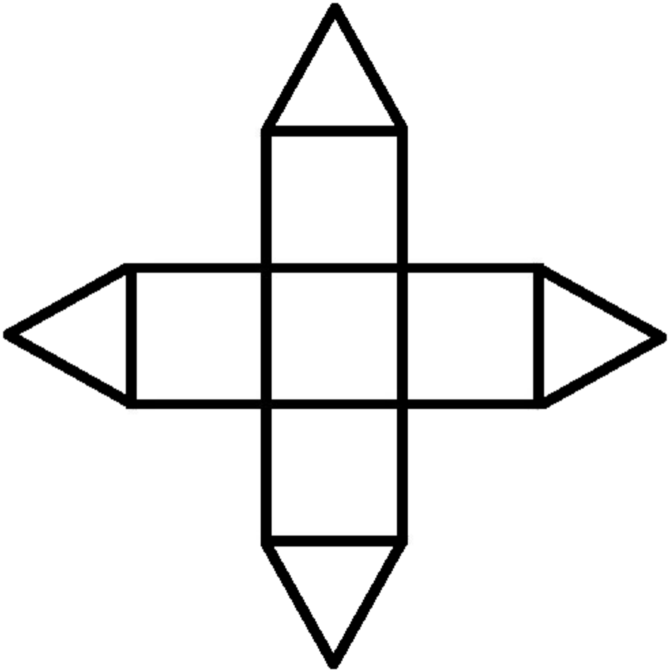
Czy wiadomo, jak sklejać?

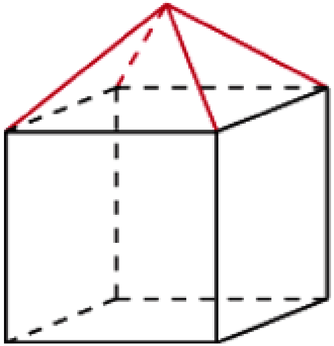


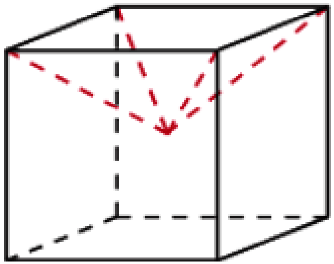
Czy wiadomo, jak sklejać?



Czy wiadomo, jak sklejać?

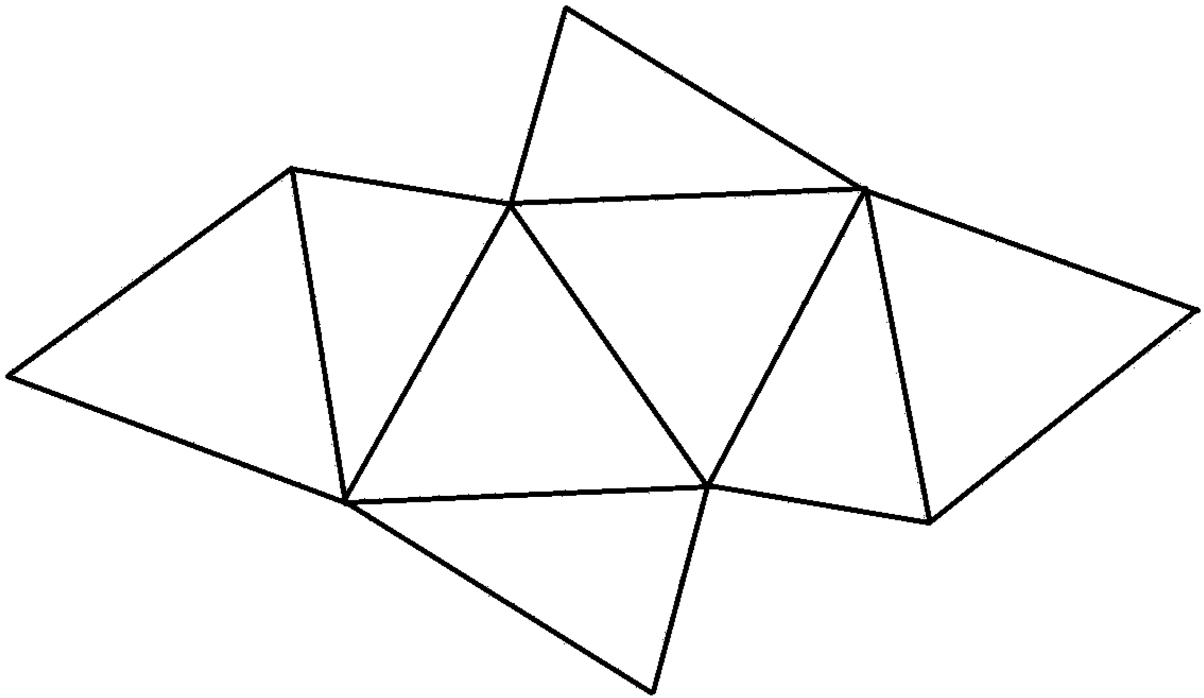




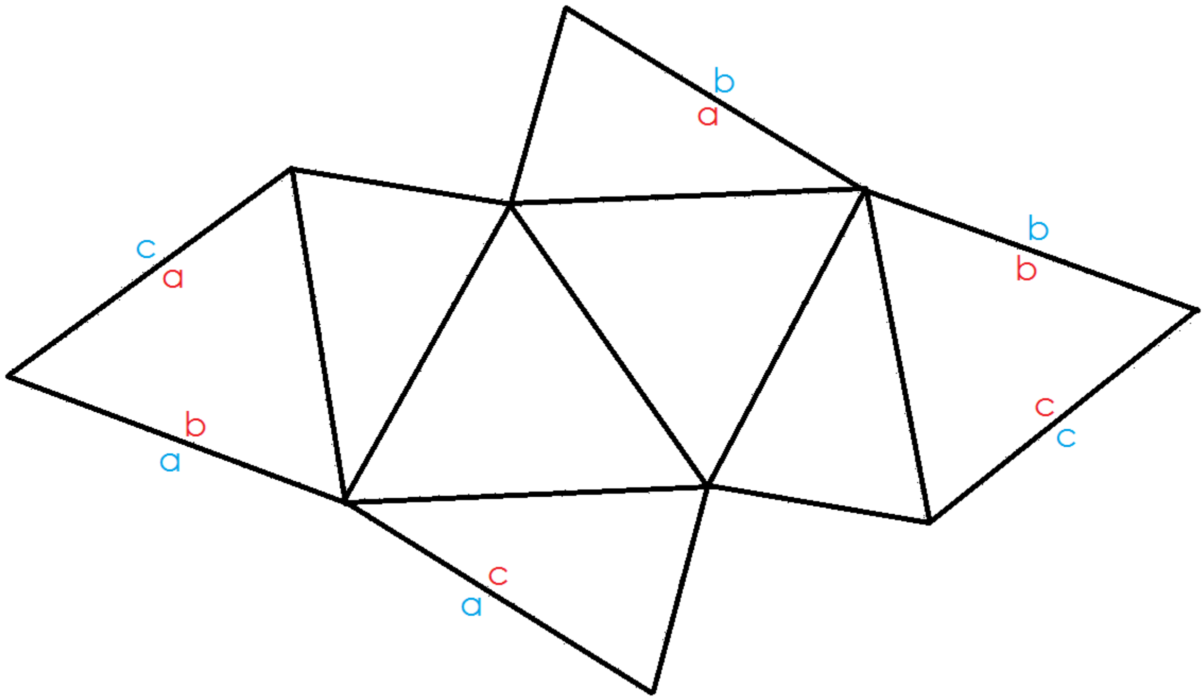


Czy wiadomo, jak sklejać, jeśli wielościan jest wypukły?

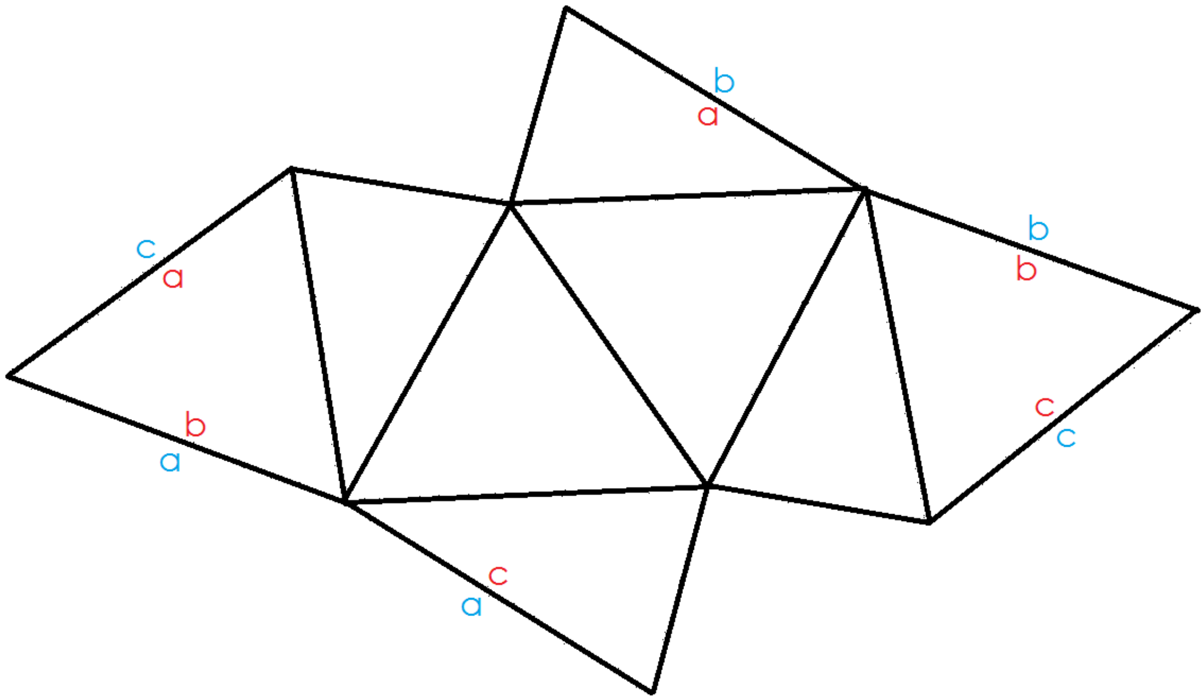
Czy wiadomo, jak sklejać, jeśli wielościan jest wypukły?



Czy wiadomo, jak sklejać, jeśli wielościan jest wypukły?

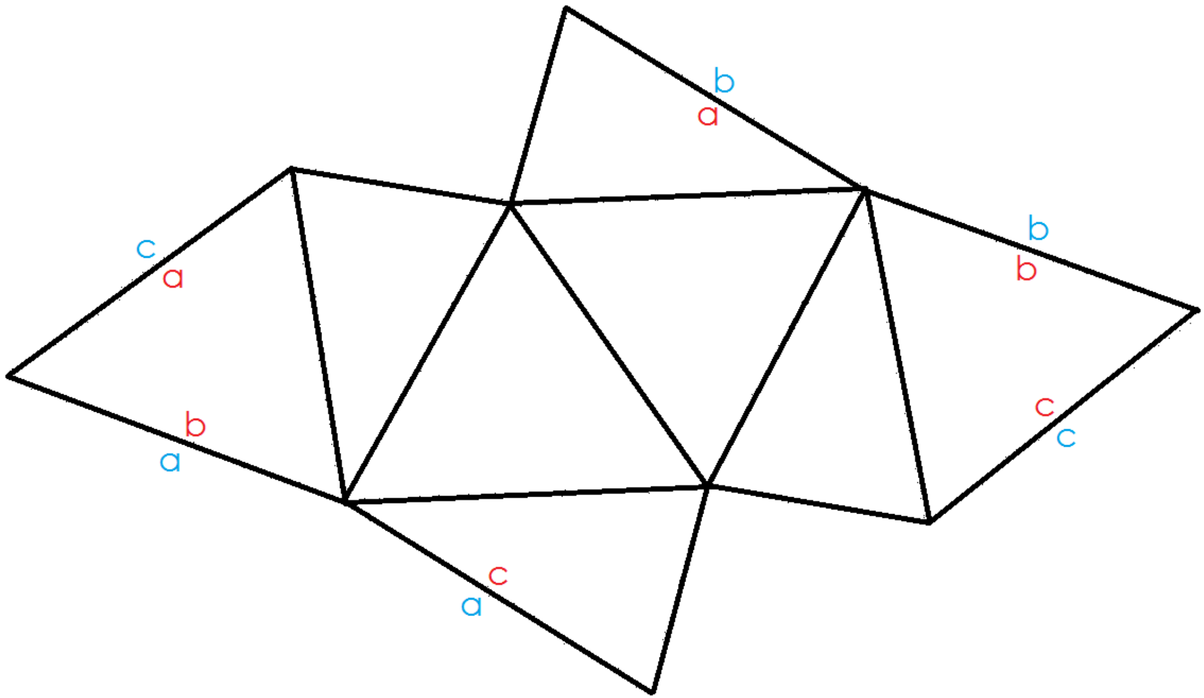


Czy wiadomo, jak sklejać, jeśli wielościan jest wypukły?



dwa ostrosłupy czworokątne sklejone podstawami

Czy wiadomo, jak sklejać, jeśli wielościan jest wypukły?



dwa ostrosłupy czworokątne sklejone podstawami albo coś zupełnie innego

Czy wiadomo, jak sklejać, jeśli wielościan jest wypukły i krawędzie są podpisane?

Czy wiadomo, jak sklejać, jeśli wielościan jest wypukły i krawędzie są podpisane?

Twierdzenie Cauchy'ego o sztywności: tak, wtedy wielościan jest wyznaczony jednoznacznie.

Czy wiadomo, jak sklejać, jeśli wielościan jest wypukły i krawędzie są podpisane?

Twierdzenie Cauchy'ego o sztywności: tak, wtedy wielościan jest wyznaczony jednoznacznie.

Ciekawostka: istnieją wklęsłe wielościany ruchome (**fleksory**).

Czy wiadomo, jak sklejać, jeśli wielościan jest wypukły i krawędzie są podpisane?

Twierdzenie Cauchy'ego o sztywności: tak, wtedy wielościan jest wyznaczony jednoznacznie.

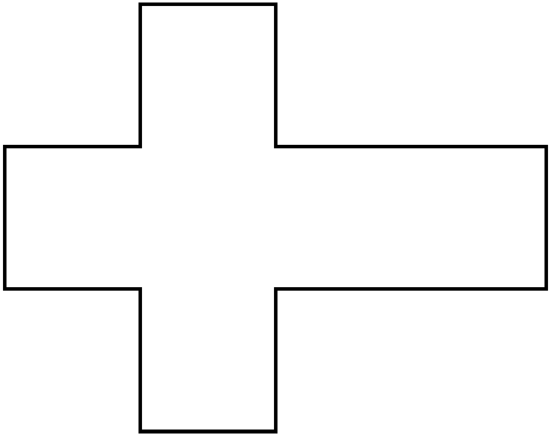
Ciekawostka: istnieją wklęsłe wielościany ruchome (**fleksory**).

Tw. Cauchy'ego-Pudzianowskiego: każdy wielościan jest fleksorem.

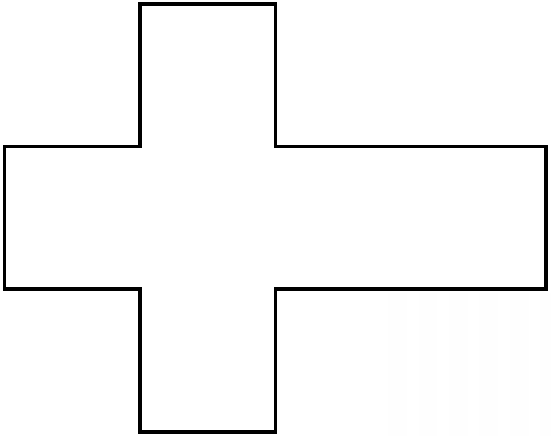
Rozpłaszczanie

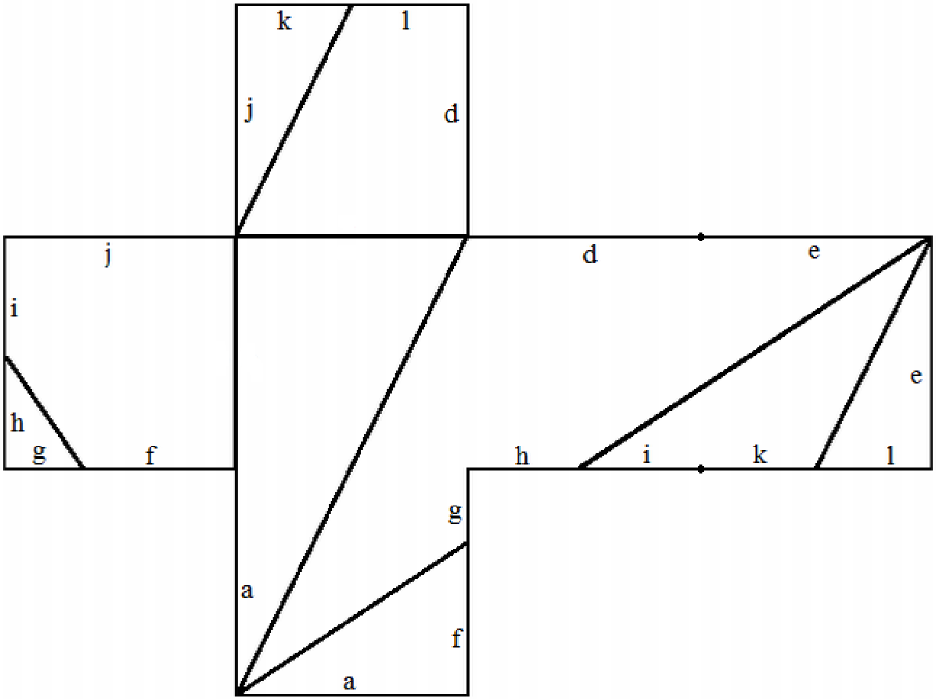
Rozpłaszczanie — czy to musiał być sześcian?

Rozpłaszczanie — czy to musiał być sześcian?



Rozpłaszczanie — czy to musiał być sześcian?

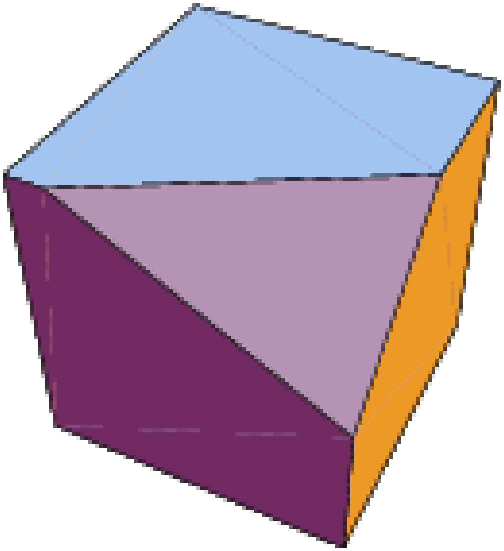


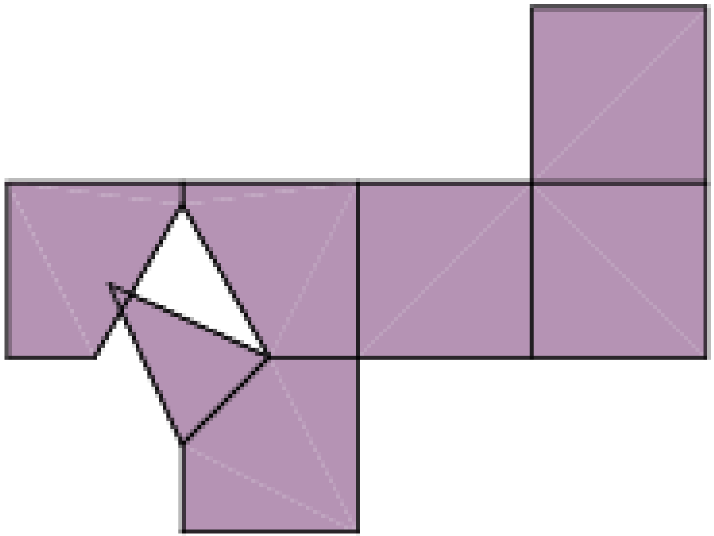


Rozpłaszczanie — siatka

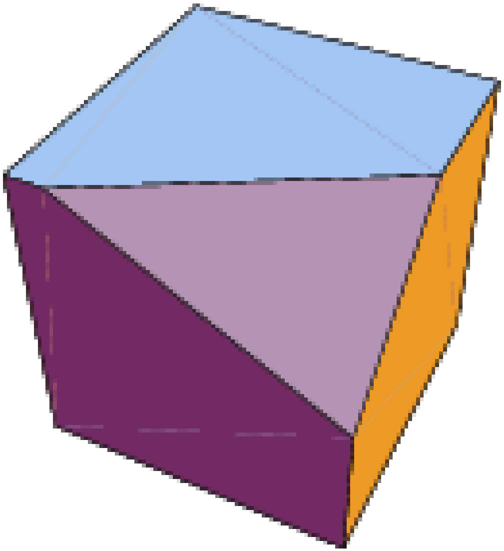
Rozpłaszczanie — siatka może sama na siebie nachodzić

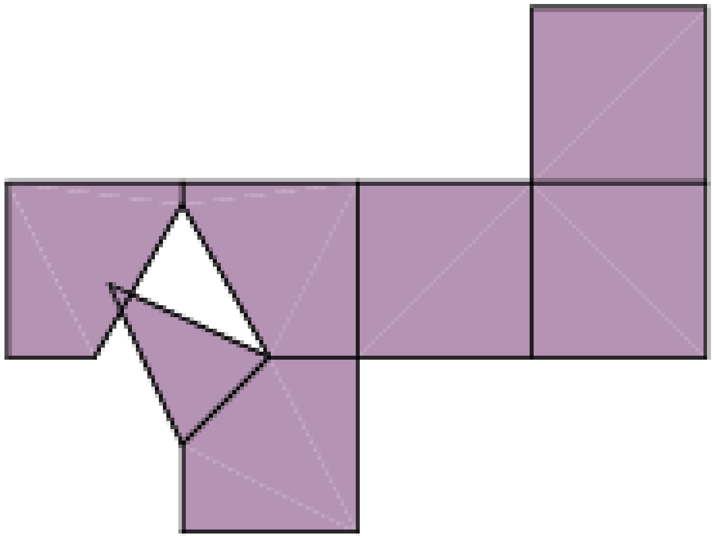
Rozpłaszczanie — siatka może sama na siebie nachodzić





Rozpłaszczanie — siatka może sama na siebie nachodzić

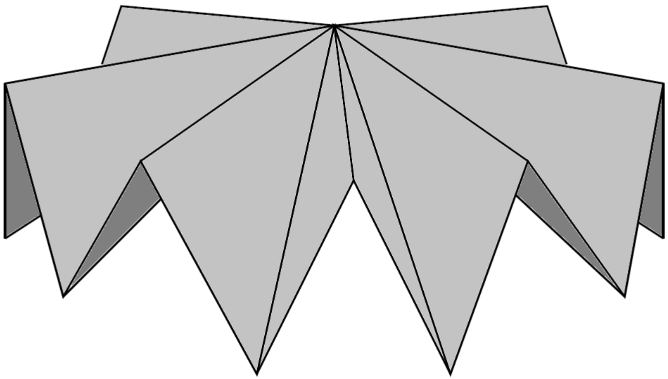




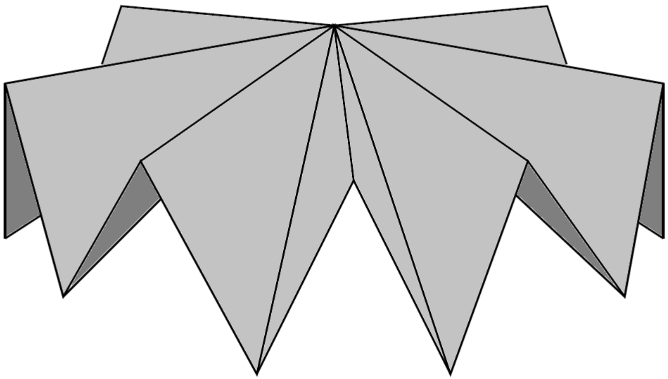
Czy zawsze w takiej sytuacji istnieje inna, dobra siatka?

Rozpłaszczanie — siatka może sama na siebie nachodzić

Rozpłaszczanie — siatka może sama na siebie nachodzić

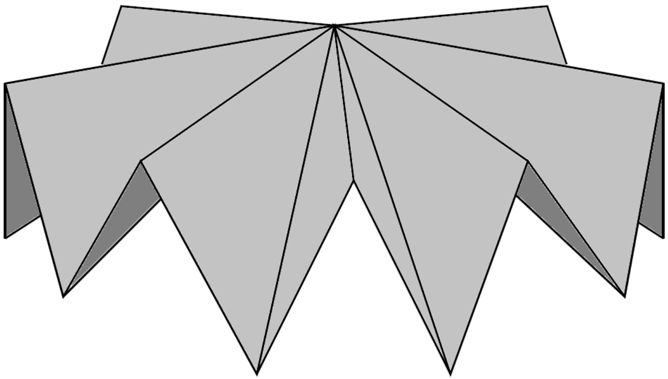


Rozpłaszczanie — siatka może sama na siebie nachodzić



Ta wielościenna powierzchnia
z brzegiem nie ma dobrej siatki.

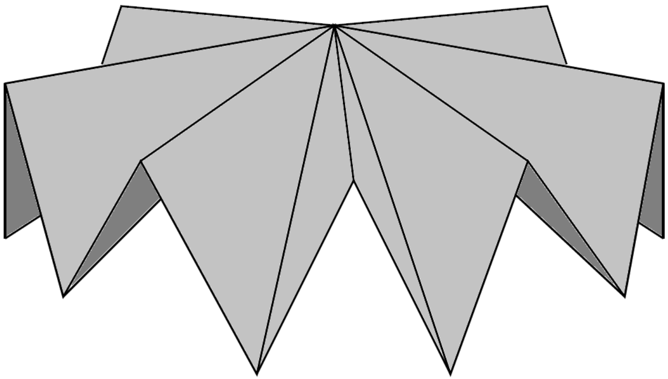
Rozpłaszczanie — siatka może sama na siebie nachodzić



Ta wielościenna powierzchnia
z brzegiem nie ma dobrej siatki.

Hipoteza Shepharda (1975): każdy wielościan wypukły ma dobrą siatkę.

Rozpłaszczanie — siatka może sama na siebie nachodzić



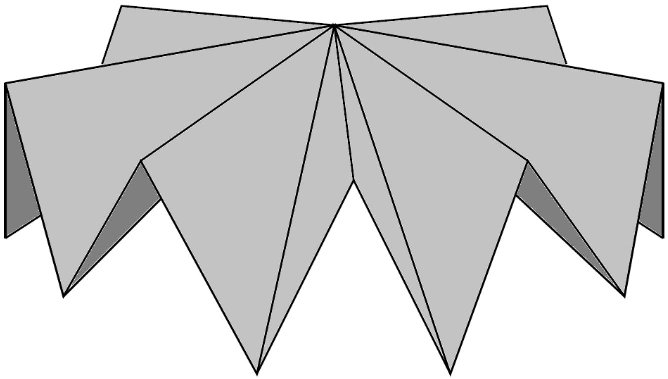
Ta wielościenna powierzchnia
z brzegiem nie ma dobrej siatki.

Hipoteza Shepharda (1975): każdy wielościan wypukły ma dobrą siatkę.

Wiadomo, że:

- istnieją wielościany wklęsłe, które nie mają dobrej siatki.

Rozpłaszczanie — siatka może sama na siebie nachodzić



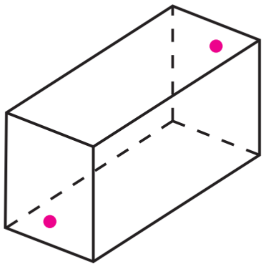
Ta wielościenna powierzchnia
z brzegiem nie ma dobrej siatki.

Hipoteza Shepharda (1975): każdy wielościan wypukły ma dobrą siatkę.

Wiadomo, że:

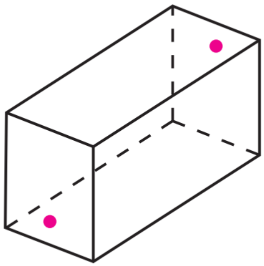
- istnieją wielościany wklęsłe, które nie mają dobrej siatki.
- wielościan wypukły można tak przekształcić afinicznie, by miał dobrą siatkę.

Pokój ma wymiary 3 m $\times$ 3 m $\times$ 5 m. Nad środkiem krótszej krawędzi podłogi, na wysokości 10 cm, siedzi pająk. Chce on dotrzeć do punktu położonego 10 cm pod przeciwległą krawędzią sufitu. Czy najkrótsza droga ma 8 m?

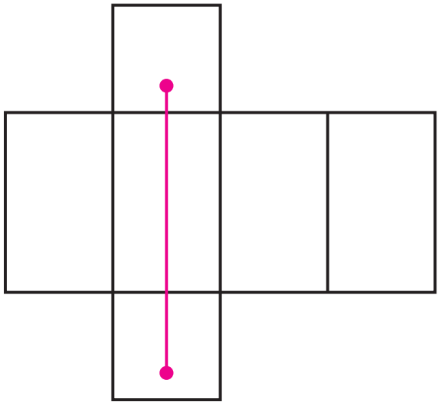


$3 \times 3 \times 5$

Pokój ma wymiary 3 m × 3 m × 5 m. Nad środkiem krótszej krawędzi podłogi, na wysokości 10 cm, siedzi pająk. Chce on dotrzeć do punktu położonego 10 cm pod przeciwległą krawędzią sufitu. Czy najkrótsza droga ma 8 m?

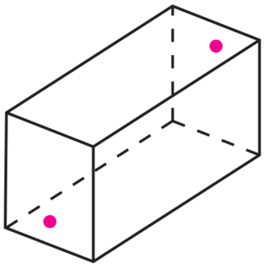


$3 \times 3 \times 5$

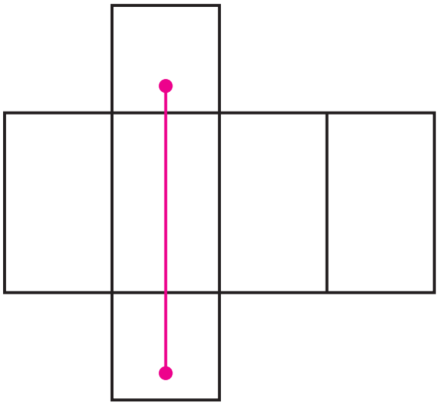


$2{,}9 + 5 + 0{,}1 = 8$

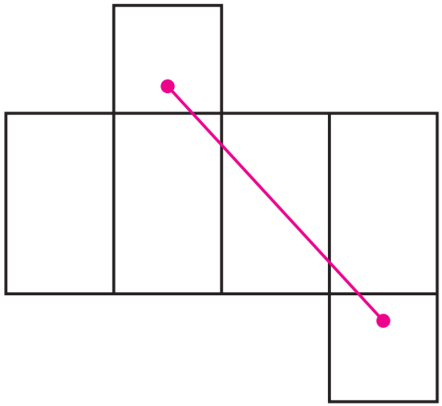
Pokój ma wymiary 3 m × 3 m × 5 m. Nad środkiem krótszej krawędzi podłogi, na wysokości 10 cm, siedzi pająk. Chce on dotrzeć do punktu położonego 10 cm pod przeciwległą krawędzią sufitu. Czy najkrótsza droga ma 8 m?



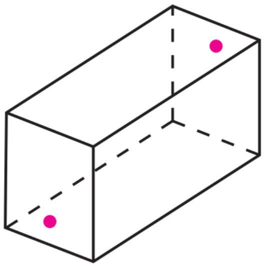
$3 \times 3 \times 5$



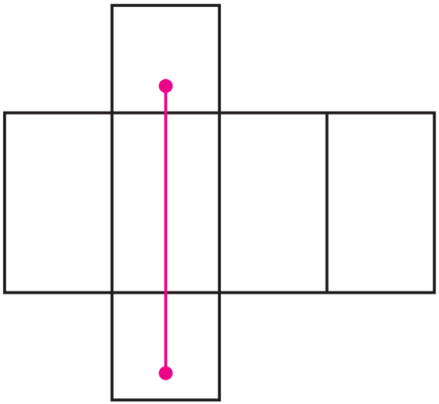
$2{,}9 + 5 + 0{,}1 = 8$



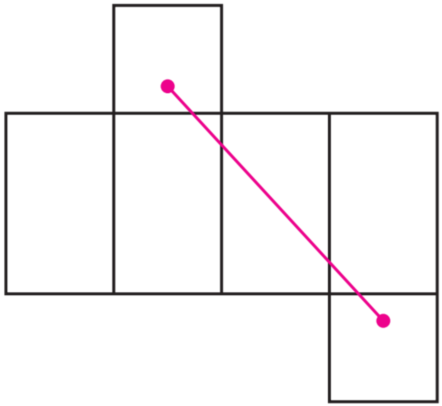
Pokój ma wymiary 3 m × 3 m × 5 m. Nad środkiem krótszej krawędzi podłogi, na wysokości 10 cm, siedzi pająk. Chce on dotrzeć do punktu położonego 10 cm pod przeciwległą krawędzią sufitu. Czy najkrótsza droga ma 8 m?



$3 \times 3 \times 5$



$2{,}9 + 5 + 0{,}1 = 8$



$\sqrt{(5,2)^2 + 6^2} < 8$

Bibliografia i źródła ilustracji

- store1589864.ecwid.com/Education-works-best-when-all-parts-are-working-p17304753

- Olimpiada Matematyczna: zadanie 8, etap I, XXV OM oraz zadanie 6, etap II, LXIV OM

- miesięcznik *Delta*, www.deltami.edu.pl,
m.in. dział *deltoid* z numerów 08/2014, 10/2014 i 07/2015
oraz artykuł: Marcin Kuczma, *Siatka czworościanu*, *Delta* 09/2013

- commons.wikimedia.org/wiki/File:Sch%C3%B6nhardt_polyhedron_rotation.gif
autor: Biophysic

- www.researchgate.net/figure/Schoenhardt-polyhedron_fig1_319140749

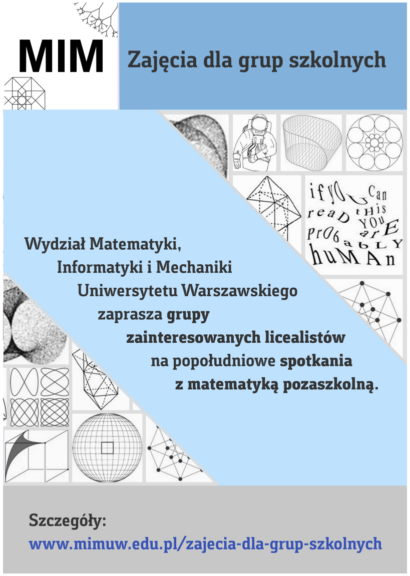
- puzzlefactory.pl/en/puzzle/play/sport/170990-mariusz-pudzianowski

- erikdemaine.org/papers/Ununfoldable/paper.pdf

- Mohammad Ghomi, *Affine Unfoldings Of Convex Polyhedra*,
arxiv.org/pdf/1305.3231.pdf

- Krzysztof Ciesielski, *102 zadania dla małych, średnich i dużych sympatyków matematyki*,
Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2012

Czwartkowe wykłady popularne z matematyki 7 listopada 2019



Zajęcia dla grup licealnych na Wydziale MIM UW

`www.mimuw.edu.pl/popularyzacja`

Kółka olimpijskie w Instytucie Matematycznym PAN

`www.impan.pl/kolkamatematyczne.html`

- **klasy VII i VIII:** pon. 16:30-18:00, sala 403, prowadzi Joanna Jaszuńska;
- **liceum:** śr. 16:30-18:00, sala 321, prowadzi Michał Wojciechowski.

`www.facebook.com/JoannaJaszunskaPopularyzacjaMatematyki`