

9 stycznia 2010 roku odbyły się zawody drugiego stopnia V Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. W ciągu trzech godzin uczniowie rozwiązywali pięć zadań. Szkice rozwiązań wszystkich zadań z zawodów OMG można znaleźć pod adresem www.omg.edu.pl

Zadania z geometrii przestrzennej zawsze sprawiały uczestnikom trudności. W tym roku na drugim etapie OMG liczba poprawnych rozwiązań zadania „przestrzennego” była niższa niż liczba rozwiązań każdego innego zadania.

Oto sformułowanie tego zadania:

(1) Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

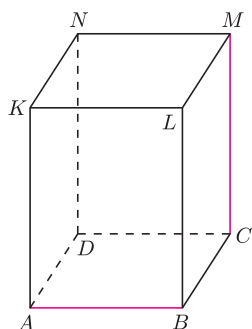
Uwaga: w przestrzeni proste prostopadłe nie muszą się przecinać.

Podobne zadanie było na finale II OMG:

(2) Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym? Odpowiedź uzasadnij.

W obu zadaniach pytamy o istnienie ostrosłupa czworokątnego, w którym pewne krawędzie są prostopadłe. W zadaniu (2) chodzi o prostopadłość krawędzi sąsiednich, a w zadaniu (1) sąsiednich bądź niesąsiednich.

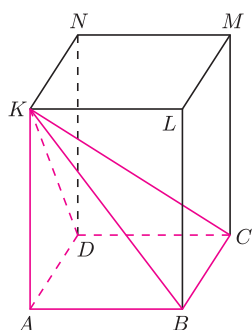
W pierwszym przypadku proste zawierające te krawędzie przecinają się, w drugim nie muszą (na co dodatkowo zwrócono uwagę w treści zadania). W obu zadaniach odpowiedź jest twierdząca. Dalej podamy przykłady odpowiednich ostrosłupów.



Przypomnijmy, że dwie proste w przestrzeni nazywamy prostopadłymi, gdy istnieje trzecia prosta, która jest równoległa do jednej z nich i przecina drugą pod kątem prostym.

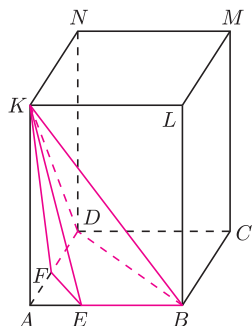
W prostopadłościanie na rysunku obok skośne proste AB i CM są prostopadłe – tą trzecią prostą może być, na przykład, prosta CD .

Prostopadłość w przestrzeni ma ważną własność: jeśli prosta k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych l i m , to prosta k jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie prostych l i m .



Spójrzmy jeszcze raz na nasz prostopadłościan: ponieważ prosta CB jest prostopadła do prostych BA i BL , więc jest prostopadła do płaszczyzny ABL , a w szczególności jest prostopadła do prostych BK i AL .

Widzimy więc, że wszystkie ściany boczne ostrosłupa o podstawie $ABCD$ oraz wierzchołku K są trójkątami prostokątnymi. Ostrosłup ten daje rozwiązanie zadania (2). Ponieważ jego krawędź boczna CK nie jest prostopadła do żadnej krawędzi podstawy, więc jednak nie jest on rozwiązaniem zadania (1).



Zmodyfikujmy nieco ten ostrosłup: podstawą będzie czworokąt $EBDF$, a wierzchołkiem pozostanie punkt K . Krawędzie boczne KE i KB są prostopadłe do krawędzi podstawy FD , a krawędzie boczne KF i KD są prostopadłe do krawędzi EB . Jest to więc przykład rozwiązania zadania (1).

Zachęcamy do rozwiązania jeszcze dwóch zadań:

(3) Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy, a podstawa jest czworokątem wklęsłym?

(4) Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy i każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym?