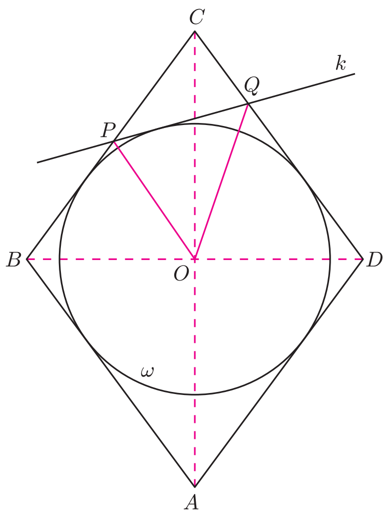
Obóz naukowy OMG

Od 29 maja do 4 czerwca w Perzanowie w woj. mazowieckim odbywał się Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Wzięło w nim udział 20 uczestników, wyłonionych spośród laureatów VI OMG.

W trakcie tygodnia uczestnicy rozwiązali 21 zadań podczas zawodów indywidualnych oraz 11 zadań w trakcie Meczu Matematycznego, który odbył się na zakończenie Obozu. Uczestnicy wzięli również udział w różnorodnych zajęciach poszerzających ich wiedzę matematyczną, przydatną w rozwiązywaniu zadań olimpijskich.

Zadania zaproponowane uczestnikom miały różnorodny poziom, były też takie, które zostały rozwiązane przez wszystkich. Poniżej prezentujemy zadanie, które zostało poprawnie rozwiązane tylko przez jednego uczestnika obozu.



Okrąg ω jest wpisany w romb $ABCD$. Prosta k, styczna do okręgu ω, przecina odcinki BC i CD odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że wartość iloczynu $BP \cdot DQ$ nie zależy od wyboru stycznej k.

Niech O oznacza środek okręgu ω (jest to jednocześnie punkt przecięcia przekątnych rombu).

Ponieważ proste DQ i PQ są styczne do okręgu ω, więc

$$\sphericalangle DQO = \sphericalangle PQO = \alpha.$$

Analogicznie

$$\sphericalangle BPO = \sphericalangle QPO = \beta.$$

Z równości $CD = CB$ otrzymujemy również, że $\sphericalangle QDO = \sphericalangle PBO = \gamma$.

Sumując kąty czworokąta $PQDB$, otrzymujemy $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$, skąd $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. W takim razie

$$\sphericalangle DOQ = 180^\circ - \sphericalangle ODQ - \sphericalangle OQD = 180^\circ - \gamma - \alpha = \beta.$$

Z równości odpowiednich kątów otrzymujemy, że trojkąty DOQ i BPO są podobne, skąd mamy

$$\frac{DO}{DQ} = \frac{BP}{BO}.$$

W takim razie iloczyn $DQ \cdot BP$ jest stały i wynosi $DO \cdot BO$.

Równie interesującym zadaniem okazało się zadanie z Meczu Matematycznego o następującej treści:

Na przyjęciu spotkało się n osób. Okazało się, że żadnych dwóch znajomych nie ma wspólnego znajomego. Ponadto każdych dwóch nieznajomych ma dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Udowodnij, że wszystkie osoby obecne na tym przyjęciu mają taką samą liczbę znajomych.

Zadanie zostało rozwiązane przez jedną z dwóch drużyn, ale przedstawienie pełnego rozwiązania sprawiło jej spore kłopoty. Nie wymagało żadnej wiedzy, decydujący okazał się pomysł na analizę sytuacji przedstawionej w zadaniu. Poniżej prezentujemy przykładowe rozwiązanie, zachęcając jednocześnie do samodzielnych poszukiwań prostszego.

Niech S będzie dowolną osobą uczestniczącą w przyjęciu i niech $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$ będzie zbiorem jej znajomych, a $B = \{B_1, \ldots, B_n\}$ zbiorem osób, których nie zna.

Dla dowolnych i, j osoby A_i i A_j nie znają się między sobą (ponieważ S jest ich wspólnym znajomym). Stąd dowolne dwie osoby z A mają dokładnie jednego wspólnego znajomego w zbiorze B.

B_k (dla każdego k) zna dokładnie dwie osoby ze zbioru A, ponieważ ma z S dwóch wspólnych znajomych. Stąd żadne trzy osoby z A nie mają wspólnego znajomego w zbiorze B.

W takim razie każda osoba A_i ma dokładnie k znajomych – jest to S oraz $k-1$ osób ze zbioru B, odpowiadających parom A_i, A_j dla $i \neq j$.

Otrzymaliśmy więc, że S ma tyle samo znajomych, co każdy jego znajomy. Z dowolności wyboru S oraz faktu, że dowolnych dwóch nieznajomych ma wspólnego znajomego, otrzymujemy tezę.

Zachęcamy Czytelników do samodzielnego rozwiązania tego zadania i próby zapisania rozwiązania w jak najprostszej postaci.

Treści wszystkich zadań rozwiązywanych w czasie Obozu dostępne są na stronie Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (www.omg.edu.pl).

Urszula SWIANIEWICZ