I Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Kontynuując ideę Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych dla licealistów, w tym roku po raz pierwszy zorganizowano odpowiadające im zawody na szczeblu gimnazjalnym. Od 20 do 23 maja 2012 r. w Mszanie Dolnej spotkały się sześcioosobowe reprezentacje trzech krajów, aby rywalizować w dwóch rodzajach zawodów: indywidualnych i drużynowych.

Zawody indywidualne formą przypominały finał Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów: uczestnicy w ciągu 4 godzin rozwiązywali pięć zadań. Następnego zaś dnia uczestnicy, w drodze losowania, zostali podzieleni na trzyosobowe drużyny w taki sposób, aby w każdej z drużyn znalazł się dokładnie jeden reprezentant każdego kraju. Drużyny otrzymały treści sześciu zadań: dwóch po czesku, dwóch po polsku i dwóch po słowacku. Rozwiązania także musiały zostać oddane w różnych językach, przy czym każde rozwiązanie miało być napisane w innym języku niż jego treść. Zmuszało to uczestników do współpracy i komunikacji między zawodnikami różnych narodowości. W większości przypadków uczestnicy poradzili sobie z tą barierą bez problemów.

W zawodach indywidualnych zwyciężył reprezentant Polski, Konrad Majewski, a część mieszaną wygrała drużyna w składzie Ema Krakovska, Konrad Majewski i Viktor Nemecek. Wszystkim zwycięzcom gratulujemy.

Przedstawiamy pochodzące od uczestników rozwiązania czwartego zadania z serii indywidualnej i trzeciego zadania z serii drużynowej.

Zadanie 4 (I). *Udowodnij, że wśród dowolnych* 51 *wierzchołków* 101*-kąta foremnego istnieją takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.*

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że potrafimy tak wybrać 51 wierzchołków 101-kąta foremnego, by żadne trzy nie były wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oznaczmy wówczas wierzchołki 101-kąta przez $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ w taki sposób, by wierzchołek A_{101} był wybrany. Podzielmy teraz pozostałe wierzchołki na 50 par postaci $\{A_i, A_{101-i}\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, 50$. Zauważmy, że każda z tych par tworzy podstawę trójkąta równoramiennego o wierzchołku A_{101}, zatem z każdej pary dokładnie jeden wierzchołek musiał być wybrany. W szczególności wybrany jest jeden z wierzchołków sąsiadujących z A_{101} (tzn. $\{A_1, A_{100}\}$) oraz jeden z wierzchołków odległych o dwa miejsca od A_{101} (czyli $\{A_2, A_{99}\}$). Nie mogą być to jednak sąsiednie wierzchołki, bo wówczas wraz z A_{101} tworzyłyby trójkąt równoramienny złożony z trzech sąsiednich wierzchołków. Zatem, gdy z jednej strony sąsiadujący z nim wierzchołek został wybrany, z drugiej wybrany został wierzchołek odległy od niego o dwa miejsca. Przypuśćmy zatem bez straty ogólności, że wybrane zostały wierzchołki A_1 i A_{99}. Stosując powyższe rozumowanie z wierzchołkiem A_1 zamiast A_{101} oraz z wierzchołkiem A_{99} zamiast A_{101}, stwierdzamy, że wybrane musiały być A_3 oraz A_{98}. Dostajemy zatem trójkąt równoramienny $A_{98}A_{101}A_3$, co jest sprzeczne z założeniem. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 3 (D). *Udowodnij, że jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba $2(n^2+1)-n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.*

Rozwiązanie. Rozważmy reszty z dzielenia liczby n przez 5.
Dla $n \equiv 0 \pmod 5$ lub $n \equiv 3 \pmod 5$ mamy $2(n^2+1)-n \equiv 2 \pmod 5$, a więc $2(n^2+1)-n$ nie może być kwadratem liczby całkowitej.
Podobnie dla $n \equiv 1 \pmod 5$ lub $n \equiv 2 \pmod 5$, liczba $2(n^2+1)-n$ nie może być kwadratem liczby całkowitej, bo $2(n^2+1)-n \equiv 3 \pmod 5$.
Przypuśćmy zatem, że $n = 5k-1$ dla pewnego k całkowitego. Wówczas

$$2(n^2+1)-n = 2((5k-1)^2+1)-(5k-1) = 50k^2-25k+5,$$

czyli $2(n^2+1)-n \equiv 5 \pmod 2 5$. Zatem liczba $2(n^2+1)-n$ jest podzielna przez 5, ale nie jest podzielna przez 25, czyli i ona nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Filip SMENTEK