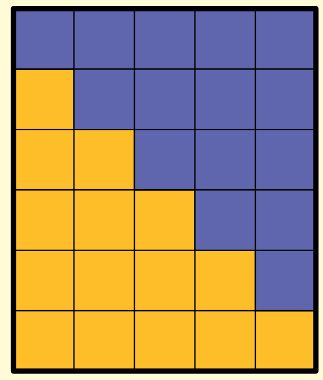
Geometrycznie o liczbach

STOWARZYSZENIE NA RZECZ
EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
Warszawa, ul. Śniadeckich 8
www.sem.edu.pl

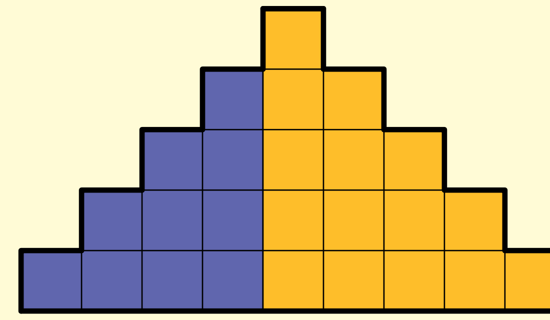
$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-1} + T_n$$

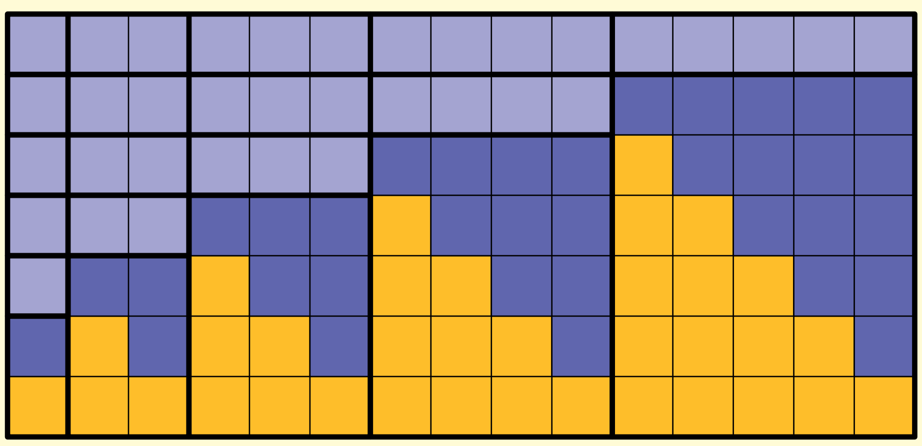
$$K_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$$



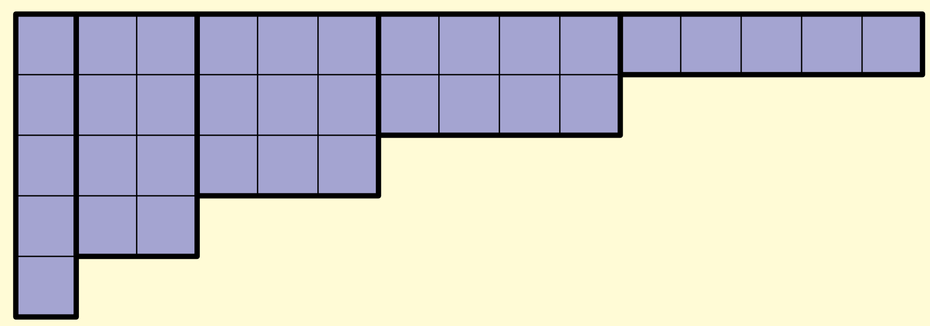
$$2T_n = n(n+1)$$



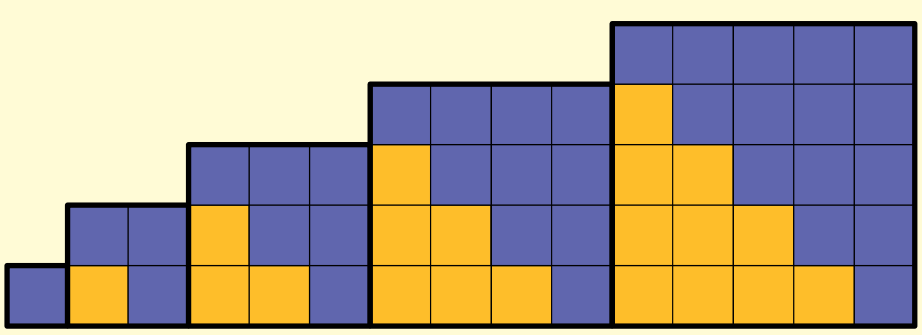
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$



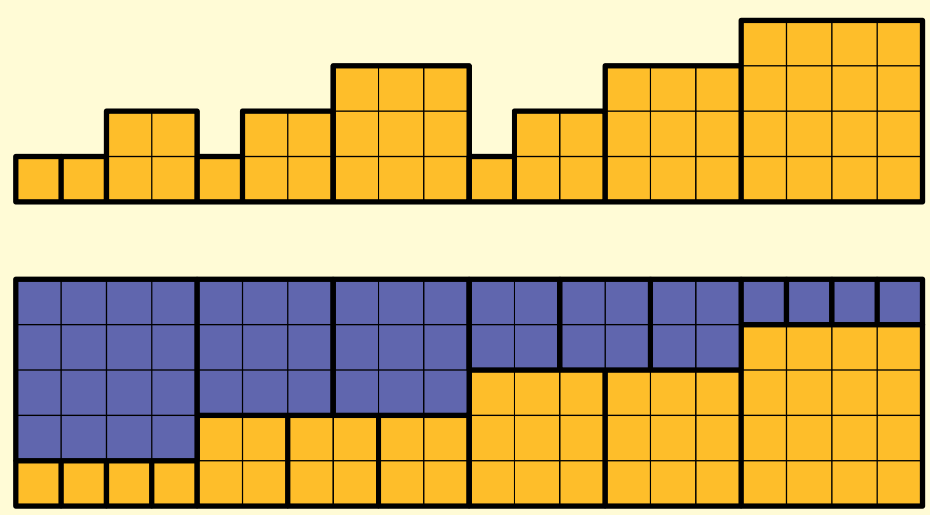
$$3S_n = T_n(n+2)$$



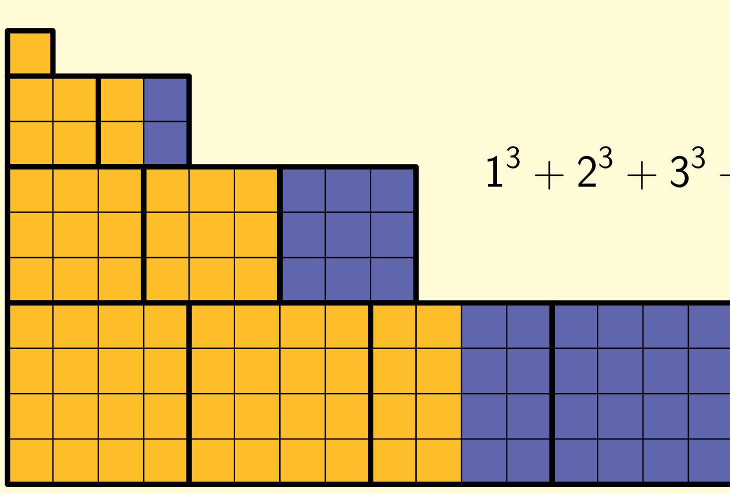
$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \ldots + n \cdot 1 = S_n$$



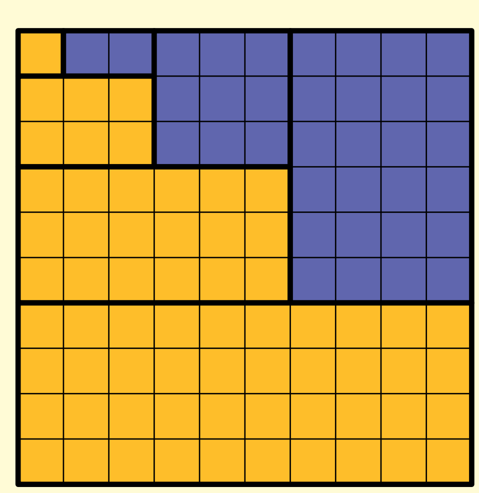
$$K_n = S_{n-1} + S_n$$



$$2(K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n) = S_n(n+1)$$



$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = T_n^2$$



Geometrycznie o liczbach

Łukasz Bożyk

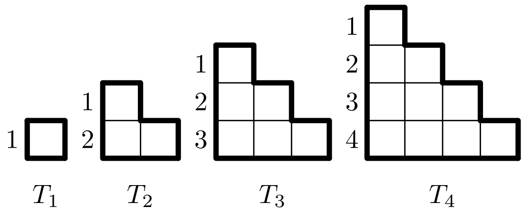
Dodatnią liczbę całkowitą n można interpretować jako pole pewnej figury składającej się z n kwadratów jednostkowych. Ten prosty pomysł pozwala w naturalny i elementarny sposób znaleźć jawne wzory na wyrazy pewnych ciągów oraz ujrzeć związki między tymi ciągami.

Przyjmijmy oznaczenia

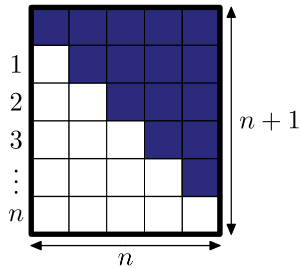
$$\begin{aligned} T_n &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n, && (1) \\ S_n &= T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-1} + T_n, && (2) \\ K_n &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2. && (3) \end{aligned}$$

(I) Ciąg (T_n) nazywa się ciągiem *liczb trójkątnych*, właśnie ze względu na interpretację geometryczną pojawiających się w nim liczb (rys. 1). Zauważmy, że z dwóch liczb trójkątnych T_n można ułożyć prostokąt o wymiarach $n \times (n+1)$ (rys. 2). To oznacza, że zachodzi równość $2T_n = n(n+1)$, czyli

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (4)$$



rys. 1

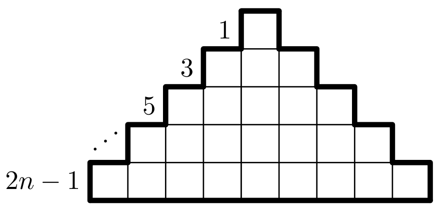


rys. 2

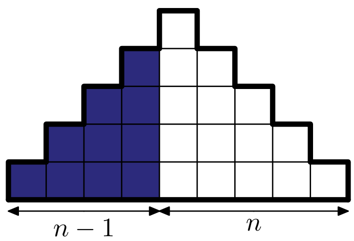
Powyższe rozumowanie polegało na przedstawieniu pola pewnej figury, w tym wypadku prostokąta, na dwa sposoby i przyrównaniu uzyskanych wyników. W ten sposób ciąg określony wzorem (1) okazał się spełniać także zależność (4). Podobnie uzasadnimy kolejne własności.

(II) Rozważmy sumę początkowych n liczb nieparzystych (rys. 3). Możemy zauważyć, że omawiana figura jest sumą dwóch kolejnych liczb trójkątnych (rys. 4), które z kolei da się ułożyć w taki sposób, aby dopełniały się do kwadratu o boku n (rys. 5). Wobec tego

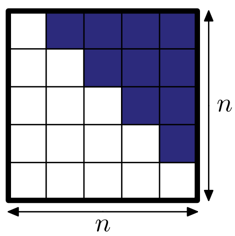
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = T_{n-1} + T_n = n^2. \qquad (5)$$



rys. 3

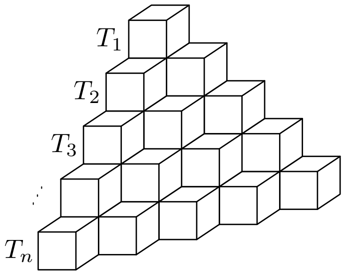


rys. 4

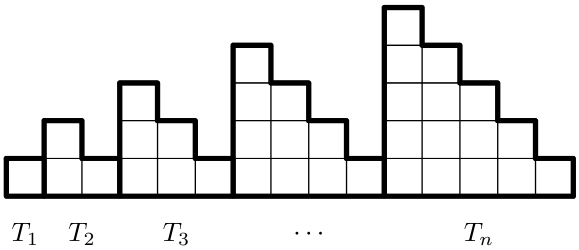


rys. 5

(III) Ciąg (S_n) określony wzorem (2), czyli ciąg sum początkowych liczb trójkątnych, bywa nazywany ciągiem *liczb czworościennych*. Jeśli bowiem zamiast kwadratów jednostkowych rozważyć jednostkowe sześciany i liczbę naturalną n utożsamić z bryłą o objętości n zbudowaną z n takich sześcianów, to liczby S_n można przedstawić jako przypominające czworościany przestrzenne struktury (rys. 6), których warstwami są kolejne liczby trójkątne.

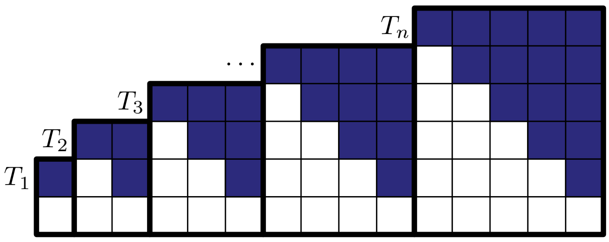


rys. 6

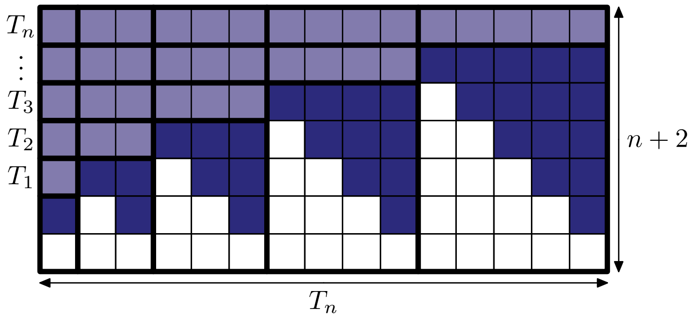


rys. 7

Do prowadzenia rozumowań w dwóch wymiarach wygodnie jest przedstawić liczbę S_n jako n sklejonych ze sobą coraz większych liczb trójkątnych (rys. 7). Do każdego trójkątnego składnika możemy dokleić drugi taki sam, uzyskując tym samym przedstawienie liczby $2S_n$ jako sumy n prostokątów (rys. 8).



rys. 8



rys. 9

Rozważmy figurę, której brakuje, aby uzupełnić rysunek 8 do prostokąta z rysunku 9. Jest ona złożona z n poziomych pasków o wysokości 1, których długości są kolejnymi liczbami trójkątnymi. Wobec tego cała omawiana figura ma powierzchnię S_n. Skoro prostokąt o wymiarach $T_n \times (n+2)$ udało się przedstawić jako sumę trzech liczb S_n, to $3S_n = T_n(n+2)$. Stąd

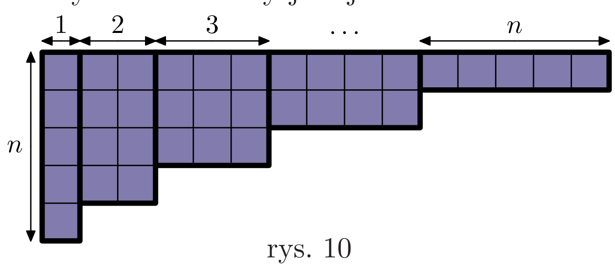
$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \tag{6}$$

przy czym, aby otrzymać ostatnią równość, skorzystaliśmy ze wzoru (4).

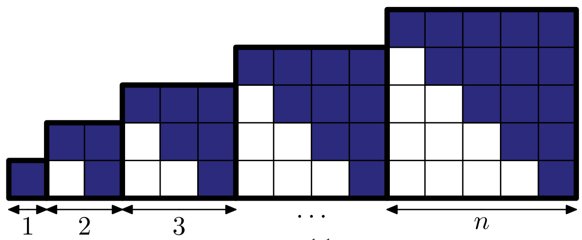
(IV) Na rysunku 9 można ujrzeć także uzasadnienie równości

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots + n \cdot 1 = S_n. \tag{7}$$

Rzeczywiście, suma po lewej stronie powyższego wyrażenia odpowiada n prostokątom (rys. 10), z których zbudowany jest jeden ze składników S_n przedstawionych na rysunku 9.



rys. 10



rys. 11

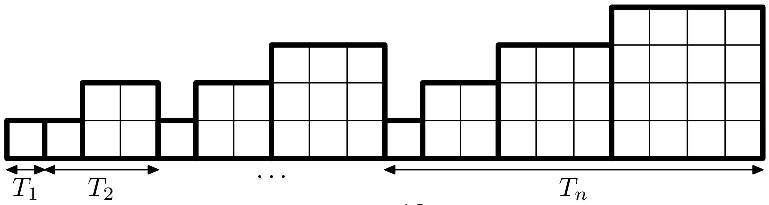
(V) Rysunek 9 może również posłużyć do wyznaczenia wzoru jawnego na wyrazy ciągu sum kwadratów (K_n) określonego równością (3). Wyodrębnienie odpowiedniej części rysunku (rys. 11) wraz ze wzorem (6) pozwala przekonać się, że

$$K_n = S_{n-1} + S_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

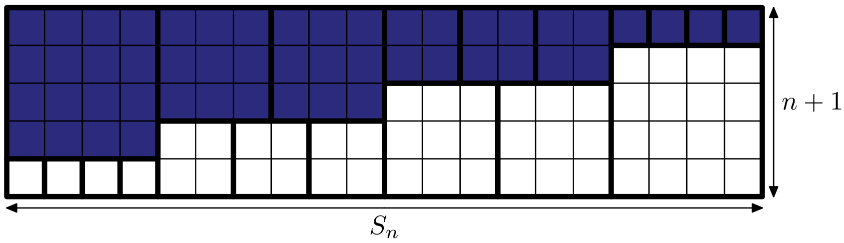
(VI) Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem wzoru na sumę

$$K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n.$$

Chociaż naturalną geometryczną interpretacją powyższego wyrażenia jest n liczb K_n ułożonych od najmniejszej do największej (rys. 12), okazuje się, że warto narysować tę sumę inaczej. Ustawmy mianowicie w porządku niemalejącym nie całe liczby K_n, a ich małe kwadratowe składniki. Wówczas z dwóch takich figur można ułożyć prostokąt (rys. 13).



rys. 12



rys. 13

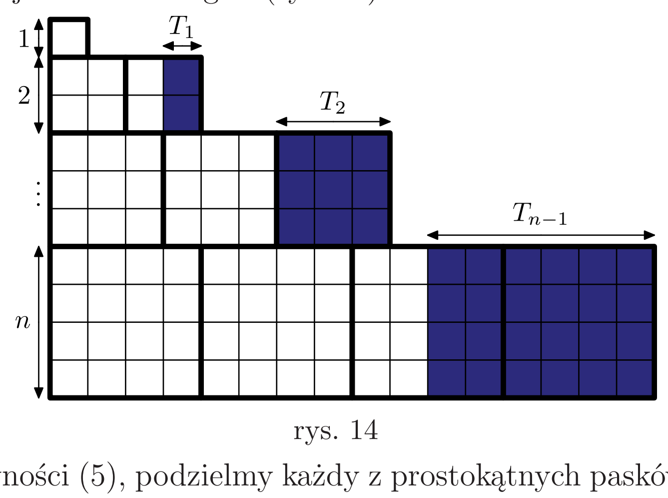
Prostokąt ten ma wysokość $n+1$, a jego szerokość jest równa S_n, o czym możemy przekonać się albo korzystając ze wzoru (7), albo patrząc na rysunek 12 (przed zmianą kolejności składników szerokość figury była taka sama). W związku z tym

$$2(K_1+K_2+K_3+\ldots+K_n) = S_n(n+1), \quad \text{skąd} \quad K_1+K_2+K_3+\ldots+K_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

(VII) Umiemy już wyznaczyć wzór na sumę kolejnych liczb naturalnych oraz sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych. Zajmijmy się więc sumą sześcianów

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3.$$

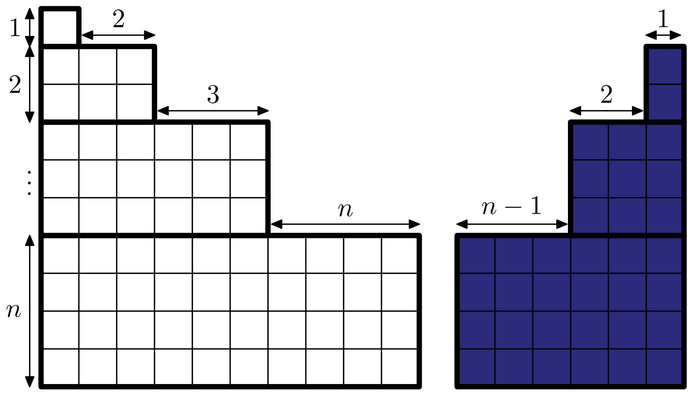
Do rozważenia tej sumy na płaszczyźnie skorzystamy z następującej obserwacji: liczbę k^3 można przedstawić w postaci prostokąta złożonego z k kwadratów o boku k, czyli prostokąta o wymiarach $k^2 \times k$. Wobec tego omawianą sumę sześcianów możemy zilustrować jako n takich prostokątów, ułożonych jeden nad drugim (rys. 14).



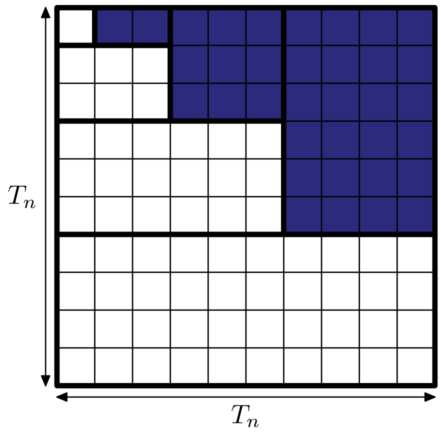
rys. 14

Korzystając z równości (5), podzielmy każdy z prostokątnych pasków $k^2 \times k$ na prostokąty o szerokościach będących kolejnymi liczbami trójkątnymi T_k oraz T_{k-1} (przyjmujemy $T_0 = 0$).

Prostokąty uzyskane z podziału możemy połączyć w dwie figury (rys. 15), które uzupełniają się do kwadratu o boku T_n (rys. 16).



rys. 15



rys. 16

Uzasadniliśmy więc, że

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = T_n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

gdzie aby uzyskać ostatnią równość, skorzystaliśmy z tożsamości (4).

Na zakończenie proponujemy kilka zadań, do rozwiązania których mogą przydać się opisane metody. Zachęcamy również do lektury artykułu *Liczby trójkątne i czworościenne*, Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów *Kwadrat* nr 11 (grudzień 2013).

1. Niech m, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Znaleźć wartości wyrażeń:

a) $T_{m+n} - T_m - T_n$;

b) $8T_n + 1$;

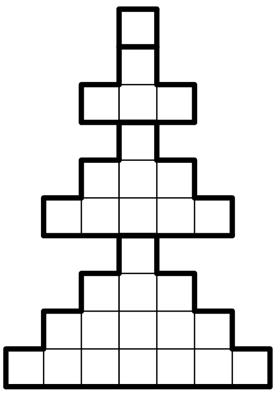
c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$;

d) $K_{m+n} - K_m - K_n$.

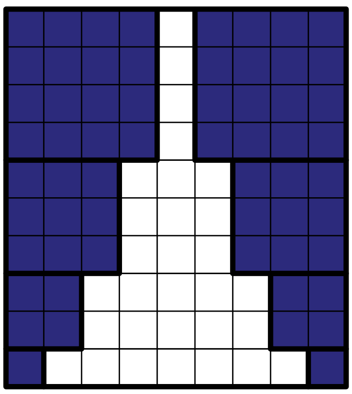
2. Znaleźć zwięzły wzór na wartość sumy $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$.

Wskazówka. Prostokąty odpowiadające liczbom $3S_n$, takie jak pokazany na rysunku 9, można ułożyć obok siebie i otrzymaną figurę uzupełnić do większego prostokąta.

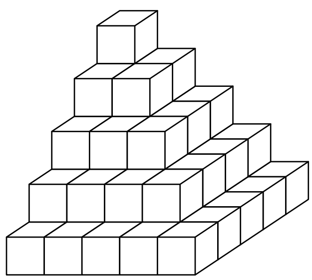
3. Wyprowadzić wzór $K_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ jeszcze dwoma sposobami: korzystając z rysunków 17 i 18 oraz wykorzystując interpretację przestrzenną liczb K_n (rys. 19).



rys. 17



rys. 18



rys. 19

Wskazówka. Rysunek 17 przedstawia liczbę K_n (zob. tożsamość (5) i rys. 3). Po zmianie kolejności pięter tej figury można uzupełnić ją do prostokąta jeszcze dwiema sumami K_n (rys. 18).

Z sześciu brył przystających do przedstawionej na rysunku 19 można ułożyć prostopadłościan o wymiarach $n \times (n+1) \times (2n+1)$.